OPUSCULO

SOBRE PROBABILIDADES,

CON APLICACION

Á ALGUNOS JUEGOS DE SUERTE,

COMPUESTO

por D. A. P. D.

CON LICENCIA: MADRID
IMPRENTA DE D. EUSEBIO ALVAREZ.
ENERO 1831.

Se hallará en Madrid en la librería de Munaiz y Millana, carrera de San Gerónimo, núm. 8.

OPÚSCULO
SOBRE PROBABILIDADES,
CON APLICACION
A ALGUNOS JUEGOS DE SUERTE.

Acepciones de las voces CERTEZA Y PROBABILIDAD.

1. Antes de pasar á esponer la doctrina del cálculo de las probabilidades, debe fijarse el sentido de la voz *probabilidad*, pues quedando vaga é inexacta su significacion, daria esto motivo á que cada uno formase ideas diferentes sobre el objeto de este cálculo, y sobre los principios sólidos en que se funda. Unos podrian creer que por medio de este ramo de las matemáticas se determina con toda exactitud el órden y el modo de suceder los acontecimientos, lo que equivaldria á preveer lo futuro; mientras que otros, que por probable no entendiesen sino lo que es muy inseguro y aun incierto, mirarian este asunto con desprecio, tendrian por atrevido su objeto, y por quiméricas las importantes verdades que de él se deducen. Unos y otros se engañarian; pero mucho mas los últimos que los primeros. Aunque las matemáticas no determinen con exactitud el *órden* y el *modo* de los eventos que han de suceder, porque siendo esto un asunto que no pende de la direccion conocida de ningun agente, es imposible preveer el órden de los sucesos, determinan sin embargo con toda la evidencia de sus demostraciones el mayor ó menor número de los que sucederán, y la mayor ó menor confianza con que debemos esperar la aparicion del acontecimiento que forme el objeto de nuestras investigaciones.

2. Comparando las voces *cierto* y *probable*, conocerémos la verdadera significacion de estas palabras, y el límite que las separa. Si subimos al orígen de nuestras ideas, hallaremos que

todas las debemos á las sensaciones ó impresiones que hacen en nuestros sentidos los objetos existentes, y á la facultad ó capacidad de estos mismos sentidos para recibir las impresiones de los cuerpos. Sino tuviéramos sentidos no sabriamos de la existencia de los objetos esteriores, y si estos no tuviesen la propiedad de hacernos impresiones análogas á las que nuestros sentidos pueden recibir, ignorariamos tambien que los habia. La conciencia, pues, de una sensacion actual ó presente, y la percepcion clara y evidente de la conveniencia ó discrepancia de dos ideas, es lo que constituye el mas alto grado de *certidumbre*. Cuando al despertar por la mañana vemos al sol, afirmamos con la mayor seguridad posible, con *certeza absoluta*, que es de dia.

3. Si comparamos este grado de certeza con la que tenemos sobre la repeticion de aquellos hechos, que hemos observado siempre sin que les conozcamos escepcion alguna, principiaremos ya á notar diferentes grados de certidumbre. La constancia de las leyes de la naturaleza funda tambien de un modo bastante seguro los motivos de nuestra creencia ó de nuestras opiniones, pero no de un modo tan absoluto. Al ver que todos los dias sale el sol, sin que esto haya dejado de suceder ni una sola vez en tantos millares de años, tenemos bastante confianza de que esto mismo se repetirá los dias siguientes; por manera que afirmaremos con mucha seguridad que el sol volverá á salir de 24 en 24 horas; pero ningun hombre podrá decir: "Estoy seguro de que mañana saldrá el sol, y esto lo conozco con la misma certeza con que lo veo hoy sobre el horizonte." ¿Quién le asegura la repeticion de un hecho, cuyas leyes no conoce bien? Acaso la ley que hasta el presente ha hecho girar á la tierra sobre su eje, y dar una vuelta entera en 24 horas, cesará ó se modificará con el tiempo; ó quizá el sol, en virtud de otras leyes y de otras revoluciones de los sistemas planetarios, mudará de lugar en lo sucesivo, y vaya á colocarse á tanta distancia de nuestro planeta, que ó le perdamos enteramente de vista, ó no le veamos sino como una estrella. Así que, el grado de certidumbre que adquirimos por medio de la repeticion constante y jamas interrumpida de los mismos hechos, está bien cerca de la *certeza absoluta*, pero no es igual á ella.

4. Siguiendo la degradacion de la certidumbre, y pasando á hechos que hayan ofrecido alguna escepcion, la veremos debilitarse mas y mas, á medida que estas escepciones hayan sido mas numerosas. Un observador, dice Lacroix, que haya notado constantemente que siempre que llueve baja el mercurio en el barómetro, que entonces sopla el aire de tal punto, y que las nubes tienen estas ó aquellas circunstancias, mirará como próxima la lluvia, cuando vea la coincidencia de todos sus indicios, sin que por esto pueda asegurar que lloverá infaliblemente; porque se acordará al mismo tiempo que algunas veces han sido engañosas estas apariencias, que el mercurio ha bajado en el barómetro, y que el tiempo ha estado nublado, sin que haya llovido; que vientos ó corrientes superiores que no se habian previsto, ó cualesquiera otras modificaciones del aire, han disipado las nubes mas amenazadoras: pero él tendrá una confianza tanto mayor en que lloverá, cuanto mayor sea el número de hechos conformes á su conjetura, que el de los hechos contrarios.

5. Aunque el hecho de llover sea dudoso para el que observa sus indicios, no debemos creer sin embargo que sea casual en sí mismo; porque este hecho natural tiene una dependencia inmediata del estado anterior y presente de la atmósfera, y de las consecuencias necesarias de este estado. Una inteligencia superior que conociese todas las condiciones necesarias, inferiria infaliblemente lo que debia suceder. Se puede, pues, asegurar, que propiamente hablando, no hay ningun acontecimiento casual; pero hay su equivalente, esto es, la ignorancia que tenemos de las verdaderas causas de los acontecimientos. El hombre limitado en sus conocimientos, no pudiendo conocer todas las circuntancias necesarias para que un acontecimiento suceda, ó no pudiendo hacer una enumeracion exacta de ellas, lo que hace es tener cuenta con todos los indicios, y si de este exámen resultan mas juicios afirmativos que negativos, entonces siente una inclinacion á creer que el hecho sucederá.

Para comprender esto mejor, supongamos que en una urna haya 15 cédulas blancas y 1 negra, y que una persona con los ojos vendados saca una de las 16 cédulas contenidas en la urna. Al ver que el número de las cédulas blancas es mucho mayor que el de las negras, juzgariamos mucho mas posible la salida

de una de aquellas que de estas, ó formaríamos 15 juicios para la salida de una cédula blanca, y 1 solo para la salida de una negra; y no podriamos menos de esperar con mucha mas confianza que sacase una de aquellas, que el que saliese la negra. Si en vez de 16 cédulas suponemos un millon de cédulas blancas y una sola negra, sería muchísimo mayor nuestra confianza en que saldria una blanca, y no podria menos de causarnos la mas viva sorpresa el que saliese la negra á la primera vez.

6. De la degradacion, pues, de la certidumbre, y de la ignorancia de las verdaderas causas de los acontecimientos, nace la *probabilidad.* Lo absolutamente cierto es aquello que conocemos con toda evidencia, como una sensacion actual, ó la conveniencia ó discrepancia de dos ideas, v. g. estas: la nieve es blanca; el círculo no es un cuadrado. Lo cierto simplemente es aquello á que no le conocemos ningun hecho contrario, y que por consiguiente tenemos una seguridad en que siempre será lo mismo: como que el sol sale todos los dias, y que una piedra arrojada al aire bajará al suelo. *Probable* es lo que se acerca mas á lo cierto que á lo incierto, aquello que tiene mas razones para suceder que para no suceder, ó en favor de lo que podemos formar mas juicios afirmativos que negativos, lo que por consiguiente engaña menos veces, ó se verifica en la mayor parte de los casos.

7. Debemos notar que hay diferentes grados de probabilidad, pero en todos ellos ha de ser mayor el número de los juicios afirmativos que el de los negativos. En el egemplo propuesto la probabilidad de sacar una cédula blanca, cuando no hay mas de 16 en la urna, es mucho menor que cuando hay un millon; pero en ambos casos hay probabilidad, porque los juicios afirmativos son mas que los negativos. El número, pues, de juicios afirmativos en contraposicion de los negativos es el que determina el grado de confianza ó de probabilidad; si se aumenta su número, se aumenta tambien la probabilidad: pero se debe advertir, que no se debe considerar este número como absoluto, sino como relativo; porque si se aumenta el número de cédulas de un color en la misma proporcion que las del otro, permanecerá siempre la misma proporcion entre los juicios afirmativos y negativos. Si se dobla, por egemplo, el número de cédulas blancas y el de las negras, habrá el mismo grado de confianza que ántes para esperar la salida de una blanca; porque

los juicios afirmativos serán 30, y 2 los negativos, lo que es equivalente á 15 afirmativos y 1 negativo, por ser iguales las dos razones 30:2 y 15:1. De aquí podemos inferir que la medida del grado de confianza debe ser la razon del número de juicios afirmativos al número total de juicios tanto afirmativos como negativos. En el egemplo propuesto esta medida es la razon que hay entre el número de cédulas blancas y el número total de ellas, esto es: $\frac{15}{16}$. Esta medida, pues, espresada numéricamente, es lo que se llama *probabilidad matemática*, que se forma *dividiendo el número de lances favorables al acontecimiento por el número total de lances.*

8. Segun lo que se acaba de ver, la probabilidad matemática está siempre espresada por una fraccion propiamente dicha, ó menor que la unidad, á la que se acercará tanto mas cuanto mayor sea el número de lances favorables al acontecimiento que se considera, con relacion al número total de lances; pero nunca podrá igualarse con la unidad sino en el caso de que no exista ningun lance contrario al acontecimiento, en cuyo caso deberia suceder infaliblemente: Si las 16 cédulas de la urna fuesen todas blancas, infaliblemente saldria una blanca, y entonces estaria espresada la probabilidad de sacar una cédula blanca por la fraccicn $\frac{16}{16}$ que es igual á 1; por manera que *la unidad es el símbolo de lo absolutamente cierto.* Es, pues, evidente que cuanto mas se acerca la fraccion de la probabilidad á la unidad, tanto mas se acerca la probabilidad á la certeza; y que si dicha fraccion llega á ser igual á 1, entonces deja de ser el hecho probable, y pasa á ser absolutamente cierto. Despues veremos con cuanta exactitud responde el cálculo á estas proposiciones.

9. Tambien debe notarse que cada acontecimiento incierto da orígen á dos probabilidades contrarias, la de que el acontecimiento sucederá, y la de que no sucederá. Y como infaliblemente ha de suceder lo uno ó lo otro, siendo la unidad el símbolo de la certeza, *la suma de estas dos probabilidades contrarias debe ser igual á la unidad.* En el egemplo de la urna la probabilidad de sacar una cédula blanca es $\frac{15}{16}$, y la de sacar una negra, ó la de no sacar una blanca, es $\frac{1}{16}$; y la suma de $\frac{15}{16}+\frac{1}{16}=\frac{16}{16}=1$.

Como los lances favorables ó contrarios á un acontecimiento

pueden ser conocidos ó desconocidos, se divide este tratado en dos partes: la primera trata de aquellas cuestiones en que el número de lances de cada especie, ó la relacion de estos números, es asignable y puede deducirse *à priori*; y la segunda se ocupa de la teoría que somete al cálculo de las probabilidades, aquellas cuestiones en que el número total de lances y sus relaciones con el de los de cada especie, no se puede determinar. Aquí se resolverán solamente algunas cuestiones pertenecientes á la primera, dando algunas fórmulas generales para resolver otras semejantes.

Determinacion à priori *de la probabilidad matemática.*

10. Se ha dicho (7) que la medida de la probabilidad matemática es la fraccion que resulta de dividir el número de lances favorables por el número total de lances. Ahora añadiremos que es necesario para la determinacion de la probabilidad que todos los lances sean igualmente posibles, porque sino lo son, varía entonces la probabilidad respectiva de cada lance.

Supongamos en confirmacion de esto, que se tiran dos dados de á seis caras cada uno, señaladas con los números desde el 1 hasta el 6; si llamamos A al un dado y B al otro, á poco que reflexionemos, conoceremos que cada una de las caras del dado A puede presentarse con cada una de las del dado B; de suerte que podrán suceder los 36 lances que manifiesta la tabla siguiente:

A B	A B	A B	A B	A B	A B
1 1	2 1	3 1	4 1	5 1	6 1
1 2	2 2	3 2	4 2	5 2	6 2
1 3	2 3	3 3	4 3	5 3	6 3
1 4	2 4	3 4	4 4	5 4	6 4
1 5	2 5	3 5	4 5	5 5	6 5
1 6	2 6	3 6	4 6	5 6	6 6

Considerando separadamente cada uno de los 36 lances de la tabla, no puede menos de notarse que todos tienen un mismo grado de probabilidad, porque todos son igualmente posibles; así que, sacar 1 con el dado A y 4 con el dado B es tan probable como sacar 6 con uno y otro dado. La probabilidad de cada uno de estos lances es $\frac{1}{36}$, porque entre todos ellos no hay mas de uno de cada especie, ó no hay ninguno igual á otro. Pero si consideramos la salida de los puntos sin distincion de órden ó de los dados que los producen, no es ya una misma la probabilidad de sacar los puntos 1 y 4, y la de sacar 6 y 6 ó las *senas*; porque la probabilidad de estas es $\frac{1}{36}$, por no haber mas de un lance entre los 36 que las produzcan; mientras que para sacar 1 y 4 ó 4 y 1, hay dos lances entre los 36 de la tabla; y por consiguiente la probabilidad de sacar 1 y 4 sin distincion de órden es $\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$.

Si en vez de considerar los puntos separadamente, no consideramos sino el número que suman estos puntos tomados colectivamente, hallaremos diversas probabilidades para cada número. Si se exigiese v. g. sacar el número 2 con una tirada de los dos dados, como entre los 36 lances que pueden suceder, solo uno de ellos da 2, que es el lance 1 y 1, no puede salir el número 2 sino de una sola manera, y su probabilidad será $\frac{1}{36}$; así como tampoco hay mas de un lance para sacar el punto 12; pero el número 7, por egemplo, puede obtenerse con los seis lances diferentes 1 y 6; 6 y 1; 2 y 5; 5 y 2; 3 y 4; 4 y 3; y en este caso será la probabilidad de sacar el número 7 con una sola tirada de los dos dados $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$. Del mismo modo sacaremos que la probabilidad de sacar 8 puntos es $\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$; la de sacar 4, $\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$; la de sacar 5, $\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$ &c.

11. Siendo tres los dados en vez de dos, se aumenta considerablemente el número de los lances; porque, segun la doctrina de las combinaciones, cada uno de los puntos del nuevo dado, que llamaremos C, puede combinarse con cada uno de los 36 lances que pueden suceder con dos dados; así que el número de lances posibles con tres dados es $36\times6=216$, como se ve en la tabla siguiente:

A. B. C.	A. B. C.	A. B. C.	A. B. C.	A. B. C.	A. B. C.
1 1 1	2 1 1	3 1 1	4 1 1	5 1 1	6 1 1
1 1 2	2 1 2	3 1 2	4 1 2	5 1 2	6 1 2
1 1 3	2 1 3	3 1 3	4 1 3	5 1 3	6 1 3
1 1 4	2 1 4	3 1 4	4 1 4	5 1 4	6 1 4
1 1 5	2 1 5	3 1 5	4 1 5	5 1 5	6 1 5
1 1 6	2 1 6	3 1 6	4 1 6	5 1 6	6 1 6
1 2 1	2 2 1	3 2 1	4 2 1	5 2 1	6 2 1
1 2 2	2 2 2	3 2 2	4 2 2	5 2 2	6 2 2
1 2 3	2 2 3	3 2 3	4 2 3	5 2 3	6 2 3
1 2 4	2 2 4	3 2 4	4 2 4	5 2 4	6 2 4
1 2 5	2 2 5	3 2 5	4 2 5	5 2 5	6 2 5
1 2 6	2 2 6	3 2 6	4 2 6	5 2 6	6 2 6
1 3 1	2 3 1	3 3 1	4 3 1	5 3 1	6 3 1
1 3 2	2 3 2	3 3 2	4 3 2	5 3 2	6 3 2
1 3 3	2 3 3	3 3 3	4 3 3	5 3 3	6 3 3
1 3 4	2 3 4	3 3 4	4 3 4	5 3 4	6 3 4
1 3 5	2 3 5	3 3 5	4 3 5	5 3 5	6 3 5
1 3 6	2 3 6	3 3 6	4 3 6	5 3 6	6 3 6
1 4 1	2 4 1	3 4 1	4 4 1	5 4 1	6 4 1
1 4 2	2 4 2	3 4 2	4 4 2	5 4 2	6 4 2
1 4 3	2 4 3	3 4 3	4 4 3	5 4 3	6 4 3
1 4 4	2 4 4	3 4 4	4 4 4	5 4 4	6 4 4
1 4 5	2 4 5	3 4 5	4 4 5	5 4 5	6 4 5
1 4 6	2 4 6	3 4 6	4 4 6	5 4 6	6 4 6
1 5 1	2 5 1	3 5 1	4 5 1	5 5 1	6 5 1
1 5 2	2 5 2	3 5 2	4 5 2	5 5 2	6 5 2
1 5 3	2 5 3	3 5 3	4 5 3	5 5 3	6 5 3
1 5 4	2 5 4	3 5 4	4 5 4	5 5 4	6 5 4
1 5 5	2 5 5	3 5 5	4 5 5	5 5 5	6 5 5
1 5 6	2 5 6	3 5 6	4 5 6	5 5 6	6 5 6
1 6 1	2 6 1	3 6 1	4 6 1	5 6 1	6 6 1
1 6 2	2 6 2	3 6 2	4 6 2	5 6 2	6 6 2
1 6 3	2 6 3	3 6 3	4 6 3	5 6 3	6 6 3
1 6 4	2 6 4	3 6 4	4 6 4	5 6 4	6 6 4
1 6 5	2 6 5	3 6 5	4 6 5	5 6 5	6 6 5
1 6 6	2 6 6	3 6 6	4 6 6	5 6 6	6 6 6

Aquí del mismo modo que en la tabla de los dos dados, cada uno de estos 216 lances es igualmente posible considerándolos aisladamente, y la probabilidad de cada uno de ellos es $\frac{1}{216}$; pero considerándolos sin distincion de órden, varía entonces su probabilidad; asi que la probabilidad de sacar 5 con el dado A, 2 con el B, y 6 con el C, que no es mas de $\frac{1}{216}$, es $\frac{1}{36}$ si se prescinde del órden; porque, segun se ve en la tabla, hay seis lances que dan el 5 el 2 y el 6, y por consiguiente su probabilidad será $\frac{6}{216}=\frac{1}{36}$.

Del mismo modo sino atendemos á los puntos, sino á su suma, obtendremos tambien muy diversas probabilidades. La de sacar, por ejemplo, 18 con tres dados será $\frac{1}{216}$; la de sacar el número 4 será $\frac{2}{216}=\frac{1}{108}$; la de sacar 5 es $\frac{6}{216}=\frac{1}{36}$; la de sacar 6, $\frac{10}{216}=\frac{5}{108}$; la de sacar 13, $\frac{21}{216}=\frac{7}{72}$ etc.

Asímismo con cuatro dados pueden suceder $216\times6=1296$ lances; con cinco $1296\times6=7776$ lances; con seis, $7776\times6=46656$ lances etc. Todo esto es conforme á la doctrina de las combinaciones.

12. Estando espresada la probabilidad de un acontecimiento por una fraccion, cuyo numerador es el número de lances favorables á la produccion de dicho acontecimiento, y el denominador el número total de lances, tendremos, que si llamamos m el número de lances favorables á un acontecimiento, y n el de los que son contrarios, se espresará algebráicamente la probabilidad de dicho acontecimiento por

$$\frac{m}{m+n}$$

y la probabilidad contraria por

$$\frac{n}{m+n} \text{ ó } 1-\frac{m}{m+n} \quad (9);$$

de suerte que si se representa por e la primera de estas probabilidades, la segunda será $1-e$.

Suponiendo que se saca una cualquiera de las 40 cartas de una baraja, en la que hay 12 figuras, la probabilidad de que la carta que se saca sea una figura, será $\frac{12}{40}=\frac{3}{10}$, y la probabilidad contraria $\frac{28}{40}=\frac{7}{10}$.

En este egemplo no se consideran sino dos suertes de lances, que son los de sacar una figura y los de no sacarla, y no hay por consiguiente sino dos suertes de acontecimientos; pero si se distingue el palo de la figura, considerando aparte la probabilidad de sacar una figura de oros, de copas, de espadas, ó de bastos, resultarán cinco acontecimientos posibles. Siendo $\frac{3}{40}$ la probabilidad de sacar una figura de palo determinado, por qué no hay mas de tres figuras de cada palo entre los 40 naipes, tendremos las probabilidades siguientes.

$\frac{3}{40}$ para sacar una figura de oros
$\frac{3}{40}$ . . . . de copas
$\frac{3}{40}$ . . . . de espadas.
$\frac{3}{40}$ . . . . de bastos
$\frac{28}{40}$ para no sacar ninguna figura; cuyas fracciones suman 1.

13. Del mismo modo calculariamos cualquiera que fuese el número de clases de acontecimientos. Suponiendo una urna que contuviese un número Y de bolas, de las cuales hubiese un número m de bolas blancas, n de encarnadas, p de azules, q de verdes, r de amarillas, s de negras, y que de dicha urna se sacase una bola á la casualidad, se obtendrian seis suertes de lances, que componen el número total

$$m+n+p+q+r+s=Y,$$

y dan las probabilidades

$\frac{m}{Y}$ de sacar una bola blanca.

$\frac{n}{Y}$ de sacar una encarnada,

y así de las demas. La suma de todas estas probabilidades será

$$\frac{m+n+p+q+r+s}{Y}=\frac{Y}{Y}=1.$$

Si hacemos $m=20$, $n=24$, $p=30$, $q=36$, $r=40$, y $s=50$; será $Y=200$; y las probabilidades anteriores serán numéricamente $\frac{m}{Y}=\frac{20}{200}=\frac{1}{10}$ de sacar una blanca; $\frac{n}{Y}=\frac{24}{200}=\frac{3}{25}$ de sacar una encarnada; $\frac{p}{Y}=\frac{30}{200}=\frac{3}{20}$ de sacar una azul; $\frac{q}{Y}=\frac{36}{200}=\frac{9}{50}$ de sacar una verde; $\frac{r}{Y}=\frac{40}{200}=\frac{1}{5}$ de sacar una amarilla, y $\frac{s}{Y}=\frac{50}{200}=\frac{1}{4}$ de sacar una negra; y la suma de todas estas probabilidades será $\frac{20}{200}+\frac{24}{200}+\frac{30}{200}+\frac{36}{200}+\frac{40}{200}+\frac{50}{200}$, ó

$$\frac{20+24+30+36+40+50}{200}=\frac{200}{200}=1.$$

14. Hasta aquí no se ha considerado sino la probabilidad absoluta de cada clase de acontecimientos; pero hay cuestiones en las que no se considera la probabilidad sino relativamente. Si se quisiese saber, por ejemplo, la probabilidad que hay de sacar el punto 7 mas bien que el 4, tirando dos dados, será necesario comparar las probabilidades absolutas de estos dos acontecimientos, para obtener su probabilidad relativa. Por la tabla del número 10 se ve que hay seis lances para sacar el punto 7, y nada mas de tres para sacar el punto 4; las probabilidades absolutas son pues $\frac{6}{36}$ para el punto 7, $\frac{3}{36}$ para el punto 4, y $\frac{27}{36}$ para los demas puntos: considerando como nulos todos los lances que no producen ni el 7 ni el 4, solo hay que considerar 9 lances de los 36, que son los 6 que dan el punto 7, y los 3 que dan el punto 4; serán pues las probabilidades respectivas de los puntos que se consideran $\frac{6}{9}$ para el 7 y $\frac{3}{9}$ para el 4; por consiguiente si dos personas apostasen de sacar la una el punto 7 y la otra el 4, el primero tendria $\frac{6}{9}$ de probabilidad para ganar, y el segundo no tendria mas de $\frac{3}{9}$.

Estas mismas probabilidades se obtendrian dividiendo la probabilidad absoluta del punto 7 y del punto 4 por la suma de estas dos probabilidades; en efecto

$$\frac{\frac{6}{36}}{\frac{6}{36}+\frac{3}{36}}=\frac{6}{9};\quad \frac{\frac{3}{36}}{\frac{6}{36}+\frac{3}{36}}=\frac{3}{9}.$$

Esto es evidente y general; por que así como para sacar la probabilidad absoluta de un acontecimiento, se forma una fraccion dividiendo los lances favorables á dicho acontecimiento por la suma de los lances favorables y contrarios, asi tambien para sacar la probabilidad relativa, se divide la probabilidad absoluta, que en este caso hace las veces de los lances favorables, por la suma de las dos probabilidades, que se toman por la suma de los lances favorables y contrarios.

La probabilidad relativa de sacar 12 con tres dados mas bien que el punto 8, se saca por medio de la tabla del núm. 11, que es dividiendo las probabilidades absolutas del punto 12 y del 8 por la suma de ambas probabilidades; lo que da

$$\frac{\frac{25}{216}}{\frac{25}{216}+\frac{21}{216}}=\frac{25}{46}, \text{ y } \frac{\frac{21}{126}}{\frac{25}{216}+\frac{21}{216}}=\frac{21}{46}.$$

En general en el ejemplo de la urna que contenia bolas de seis colores, la probabilidad de sacar una bola blanca mas bien que una encarnada, será

$$\frac{\frac{m}{Y}}{\frac{m}{Y}+\frac{n}{Y}}=\frac{mY}{mY+nY}=\frac{m}{m+n},$$

y la probabilidad contraria, es decir, la de sacar una encarnada mas bien que una blanca, es

$$\frac{n}{m+n}.$$

Hemos podido notar que en la determinacion de la probabilidad *relativa*, se prescinde de todos los lances estraños á los dos acontecimientos, los cuales se consideran como si ellos solos hubiesen de suceder, puesto que todos los demas son nulos con relacion á las condiciones propuestas; de aquí resulta, como se ha visto en los ejemplos, que *la probabilidad relativa se obtiene dividiendo la probabilidad absoluta del acontecimiento de que se trata*

por la suma de las dos probabilidades absolutas de los acontecimientos que se comparan.

15. Tambien debe notarse, que muchas veces se forma un solo acontecimiento de muchas clases de lances, y entonces se obtiene su probabilidad, sumando la de todos los lances. Si, por ejemplo, jugando con tres dados se pusiese la condicion de sacar indistintamente bien el punto 12 ó el 13, hallaremos por la tabla, que la probabilidad del punto 12 es $\frac{25}{216}$, y la de sacar el 13 es $\frac{21}{216}$, y como ya se saque el 12 ya el 13 se llena la condicion pedida, se deberán sumar sus dos probabilidades para obtener la que se pide, que es

$$\frac{25}{216}+\frac{21}{216}=\frac{46}{216}=\frac{23}{108}>\frac{1}{5};$$

lo que por otra parte es evidente, pues que la condicion propuesta abraza 46 lances de los 216 que pueden suceder tirando tres dados.

En el ejemplo de la urna la probabilidad de sacar una bola blanca ó una encarnada es

$$\frac{m}{Y}+\frac{n}{Y}=\frac{m+n}{Y}$$

la de sacar una blanca, ó una encarnada, ó una azul, es

$$\frac{m+n+p}{Y}$$

y la de sacar una blanca, ó encarnada, ó azul, ó verde, ó amarilla ó negra, es

$$\frac{m+n+p+q+r+s}{Y}=\frac{Y}{Y}=1;$$

cuya fraccion, igual á la unidad, manifiesta que infaliblemente saldrá uno de los seis colores pedidos; lo que desde luego es evidente, por que la urna no contiene bolas de otros colores; por ma-

nera que el cálculo responde perfectamente con sus resultados á la evidencia de los raciocinios.

16. Muchas veces el acontecimiento que se pide, se compone del concurso de otros muchos, que tiene cada uno su probabilidad propia, de las que se debe deducir la del primero. Si se tratase, por ejemplo, de sacar de una baraja de 40 naipes una figura de palo determinado, y se dividiese la baraja en cuatro paquetes con las 10 cartas de cada palo cada uno, mezcladas entre ellas de un modo ignorado, pudiendo estar indiferentemente la carta designada en uno cualquiera de los cuatro paquetes, la probabilidad de dirigir la mano al paquete que la contiene es $\frac{1}{4}$; pero como este paquete contiene 10 cartas entre las que solo se encuentran 3 figuras, la probabilidad de sacar una de estas, cuando se lleva la mano al paquete que la contiene, será $\frac{3}{10}$. Asi que para acertar con la carta determinada, es necesario el concurso de dos acontecimientos, cuyas probabilidades son $\frac{1}{4}$ y $\frac{3}{10}$. La probabilidad de este concurso es el producto de las dos precedentes; por que siendo los paquetes iguales y conteniendo uno solo la carta designada, los lances que la dan son $\frac{1}{4}$ del número total de lances; y como de los 10 lances contenidos en este $\frac{1}{4}$ tres solamente llenan la condicion pedida, se deberán tomar los $\frac{3}{10}$ de $\frac{1}{4}$ para obtener la razon del número de lances favorables al número total de lances; será pues la probabilidad buscada $\frac{1}{4}\times\frac{3}{10}=\frac{3}{40}$. Esta probabilidad es la misma que se halla suponiendo todas las cartas juntas en un paquete, donde solo se encontrarán 3 figuras de cada palo entre las 40 cartas: la probabilidad pues de sacar una de aquellas, siendo 3 los lances favorables y 37 los contrarios es

$$\frac{3}{3+37}=\frac{3}{40}.$$

17. El ejemplo anterior puede representarse por la tirada simultanèa de dos dados, de los cuales el uno tenga 4 caras, una señalada con la letra A y las otras blancas, y el otro 10 caras, tres señaladas con la letra B y las otras blancas: el concurso de las letras A y B será precisamente semejante al de los acontecimientos del número anterior. Pero pudiéndose presentar cualquiera de las caras del primer dado con cualquiera de las del se-

gundo, el número total de lances será $4 \times 10 = 40$; y entre este número 3 solamente formados por la combinacion de la cara A del primer dado con las tres caras B del segundo, llenan la condicion pedida; la probabilidad que se busca, será pues $\frac{3}{40} = \frac{1}{4} \times \frac{3}{10}$, como ya lo hemos hallado de otra manera.

18. En general, si $\frac{m}{m+n}$ representa la probabilidad de un acontecimiento, y $\frac{p}{p+q}$ la de otro, la probabilidad de su concurso será

$$\frac{m}{m+n} \times \frac{p}{p+q} = \frac{mp}{(m+n)(p+q)};$$

porque podemos suponer que se tiran dos dados, de los que el primero tenga m caras señaladas con la letra A y n caras blancas, y el segundo p caras señaladas con la letra B y q caras blancas. Entonces el número total de lances posibles será, como hemos visto en el ejemplo anterior y en el número 10, el producto de todas las caras del primer dado por todas las del segundo, esto es, $(m+n)(p+q)$; pero entre este número de lances solamente hay las mp combinaciones de las caras señaladas con la letra A y de las señaladas con B, que produzcan el acontecimiento pedido; así que la probabilidad del concurso de las letras A y B es

$$\frac{mp}{(m+n)(p+q)} = \frac{m}{m+n} \times \frac{p}{p+q}.$$

Estas consideraciones pueden estenderse al concurso de tres acontecimientos A, B, C, cuyas probabilidades particulares fuesen

$$\frac{m}{m+n}, \quad \frac{p}{p+q}, \quad \frac{r}{r+s};$$

la probabilidad de su concurso será

$$\frac{mpr}{(m+n)\ (p+q)\ (r+s)} = \frac{m}{m+n} \times \frac{p}{p+q} \times \frac{r}{r+s},$$

y del mismo modo cualquiera que fuese el número de los acontecimientos.

Si llamamos *probabilidad simple* la de cada acontecimiento en particular, y *probabilidad compuesta* la de su concurso, se puede establecer generalmente este principio: *la probabilidad compuesta es el producto de las probabilidades simples.*

16. Por medio de las probabilidades compuestas se abrevian mucho los cálculos, pues se evita el tener que formar el desarrollo de todas las combinaciones posibles. Supongamos que se hayan juntado en un paquete los 12 naipes de un mismo palo de una baraja de 48 cartas, y que se pregunta la probabilidad de que las dos primeras cartas del paquete sean el as, y el dos, por ejemplo. Si hubiesemos de sacar esta probabilidad ajustando todos los lances posibles ó todas las combinaciones de las 12 cartas, tendriamos que considerar que en el primer lugar puede hallarse el 1 y en el segundo el 2, ó el 1 y 3; 1 y 4; 1 y 5; 1 y 6; 1 y 7; 1 y 8; 1 y 9; 1 y 10; 1 y 11; 1 y 12; ó el 2 y 1; 2 y 3; 2 y 4; 2 y 5; 2 y 6; 2 y 7; 2 y 8; 2 y 9; 2 y 10; 2 y 11; 2 y 12; ó el 3 y 1; 3 y 2; 3 y 4; 3 y 5; 3 y 6; 3 y 7; 3 y 8; 3 y 9; 3 y 10; 3 y 11; 3 y 12; ó el 4 y 1; 4 y 2; 4 y 3; 4 y 5; 4 y 6; 4 y 7; 4 y 8; 4 y 9; 4 y 10; 4 y 11; 4 y 12; ó el 5 y 1; 5 y 2; 5 y 3; 5 y 4; 5 y 6; 5 y 7; 5 y 8; 5 y 9; 5 y 10; 5 y 11; 5 y 12; ó el 6 y 1; 6 y 2; 6 y 3; 6 y 4; 6 y 5; 6 y 7; 6 y 8; 6 y 9; 6 y 10; 6 y 11; 6 y 12; ó el 7 y 1; 7 y 2; 7 y 3; 7 y 4; 7 y 5; 7 y 6; 7 y 8; 7 y 9; 7 y 10; 7 y 11; 7 y 12; ó el 8 y 1; 8 y 2; 8 y 3; 8 y 4; 8 y 5; 8 y 6; 8 y 7; 8 y 9; 8 y 10; 8 y 11; 8 y 12; ó el 9 y 1; 9 y 2; 9 y 3; 9 y 4; 9 y 5; 9 y 6; 9 y 7; 9 y 8; 9 y 10; 9 y 11; 9 y 12; ó el 10 y 1; 10 y 2; 10 y 3; 10 y 4; 10 y 5; 10 y 6; 10 y 7; 10 y 8; 10 y 9; 10 y 11; 10 y 12; ó el 11 y 1; 11 y 2; 11 y 3; 11 y 4; 11 y 5; 11 y 6; 11 y 7; 11 y 8; 11 y 9; 11 y 10; 11 y 12; ó el 12 y 1; 12 y 2; 12 y 3; 12 y 4; 12 y 5; 12 y 6; 12 y 7; 12 y 8; 12 y 9; 12 y 10; 12 y 11.

Entre estas 132 combinaciones de á dos cartas que pueden hallarse en los dos primeros lugares del paquete, la primera solamente llena la condicion pedida, luego hay un lance para que suceda el acontecimiento deseado, y 131 para que no suceda; será pues su probabilidad

$$\frac{1}{1+131}=\frac{1}{132}.$$

Mucho trabajo nos hubieramos ahorrado, si nos hubiesemos valido de la fórmula de las permutaciones. Todas las que se pueden formar con 12 cartas son el producto de 1. 2. 3. 4...... 11. 12; y observando que cuando dos de las cartas del paquete tienen un sitio determinado, quedan 10 que se pueden combinar entre sí de todas las maneras posibles; esto es; de 1. 2. 3. 4.... 10 maneras, serán estos los lances que producen el acontecimiento deseado; cuya probabilidad será por consiguiente

$$\frac{1.\ 2.\ 3.\ 4......\ 10.}{1.\ 2.\ 3.\ 4......\ 10.\ 11.\ 12.};$$

y suprimiendo los factores 1. 2. 3. 4.... 10, que son comunes al numerador y denominador, queda solamente

$$\frac{1}{11\ 12}=\frac{1}{132},$$

que es lo mismo que ya habiamos sacado.

Pero esta misma probabilidad la sacaremos facilísimamente por medio de las probabilidades compuestas: para esto consideraremos, que la probabilidad de que el *as* sea la primera carta del paquete es $\frac{1}{12}$, puesto que podria hallarse en uno cualquiera de los 12 sitios del paquete; quitada la primera carta quedan 11; asi que la probabilidad de que el *dos* se halle en el primer lugar de estas 11 es $\frac{1}{11}$; la probabilidad pues del concurso de estos dos acontecimientos será

$$\frac{1}{12}\times\frac{1}{11}=\frac{1}{132}.$$

De este mismo modo hallaremos con igual facilidad, que la probabilidad, de que las tres primeras cartas del paquete sean el *as*, el *dos*, y el *tres*, es $\frac{1}{12} \times \frac{1}{11} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{1320}$; la de que las cuatro primeras sean el *as*, el *dos*, el *tres*, y el *cuatro* es

$$\frac{1}{12} \times \frac{1}{11} \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{11880} \text{ etc.}$$

20. Para convencernos mas claramente de la facilidad con que se resuelven los problemas por medio de las probabilidades compuestas, supongamos dos urnas, en una de las cuales haya 2 bolas blancas y 1 negra, y en la otra 4 blancas y 1 negra; y que se pide la probabilidad de sacar una blanca, tomando á la casualidad de una cualquiera de las dos urnas.

La probabilidad de meter la mano en la primera urna es $\frac{1}{2}$, y la de sacar una bola blanca de esta urna cuando se ha metido la mano en ella es $\frac{2}{3}$; la probabilidad pues del concurso de estos dos acontecimientos es $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{6}$.

Del mismo modo la probabilidad compuesta de la segunda urna es $\frac{1}{2} \times \frac{4}{5} = \frac{4}{10}$.

Ahora sumaremos las dos probabilidades $\frac{2}{6}$ y $\frac{4}{10}$; porque cada una de ellas espresa una parte de los lances favorables al acontecimiento pedido, puesto que tanto se puede llevar la mano á la primera urna como á la segunda: será pues la probabilidad total $\frac{2}{6} + \frac{4}{10} = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{11}{15}$.

Del mismo modo calcularemos la probabilidad de sacar una bola negra, que es $\frac{1}{6} + \frac{1}{10} = \frac{4}{15}$. Sumando $\frac{4}{15}$ con $\frac{11}{15}$ resulta la unidad, como debe suceder, porque se trata de dos acontecimientos de los que precisamente ha de suceder uno.

Este egemplo puede dar márgen á un error, que vamos á prevenir. A primera vista pudiera pensarse que siendo 8 las bolas contenidas en las dos urnas, entre las que se encuentran 6 blancas y 2 negras, la probabilidad de sacar una blanca será $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$; cuya fraccion es mayor que $\frac{11}{15}$ que hemos sacado antes.

Este error proviene de que para considerar juntas las bolas de las dos urnas, se necesita que el número de bolas sea el mismo en una y otra, para que todos los lances sean igualmente posibles, lo que no sucederia sin esta circunstancia. En efecto, considerando separadas las bolas, la probabilidad de sacar una de las de la primera urna es igual á la de sacar una de las de la

segunda; pero si se consideran juntas todas las bolas, siendo entonces 8, de las cuales 3 son de la primera urna y 5 de la segunda, ya no es igual la de sacar una de las de la primera á la de sacar una de las de la segunda; siendo $\frac{3}{8}$ la probabilidad de sacar una de las bolas de la primera urna, y $\frac{5}{8}$ la de sacar una de las de la segunda.

Pero esta diferencia de probabilidades desaparece: 1.º cuando el número de bolas es el mismo en una y otra urna; porque entonces, aunque se consideren juntas todas las bolas, la probabilidad de sacar una de las de la primera es igual á la de sacar una de las de la segunda.

2.º Reduciendo al mismo denominador las probabilidades $\frac{2}{3}$ y $\frac{4}{5}$ de sacar una bola blanca de cada urna, lo que no altera los valores respectivos de estas probabilidades, pues dichas fracciones siempre son del mismo valor aunque se reduzcan al mismo denominador. Haciéndolo asi se convierten en $\frac{10}{15}$ y $\frac{12}{15}$: de este modo se considera que la primera urna contiene 10 bolas blancas y 5 negras, y la segunda 12 blancas y 3 negras; las probabilidades respectivas son las mismas que antes (7), y el número total de bolas se ha hecho el mismo en cada urna: considerando ahora estas bolas reunidas en una sola urna en número de 30, de las cuales 22 son blancas, la probabilidad de sacar una bola blanca es $\frac{22}{30}=\frac{11}{15}$, que es lo que antes habiamos sacado.

3.º Cuando entre las bolas blancas y negras de la primera urna hay la misma razon que entre las bolas blancas y negras de la segunda. Si suponemos que en la primera haya 9 bolas blancas y 3 negras, y en la segunda 15 blancas y 5 negras, como en una y otra urna la razon de las blancas á las negras es la misma, esto es, 3:1, la misma probabilidad sacaremos en este caso considerándolas aparte, que si las suponemos reunidas. En efecto, la de sacar una bola blanca de la primera urna es $\frac{1}{2}\times\frac{9}{12}=\frac{9}{24}$; y la de sacar una blanca de la segunda es $\frac{1}{2}\times\frac{15}{20}=\frac{15}{40}$; la suma de estas dos probabilidades es $\frac{9}{24}+\frac{15}{40}=\frac{3}{8}+\frac{3}{8}=\frac{6}{8}$. Si suponemos ahora todas las bolas juntas, como entre todas son 32, de las que 24 son blancas, será la probabilidad de sacar una blanca $\frac{24}{32}=\frac{6}{8}$.

21. Si se quiere una demostracion general de toda esta doctrina, supongamos urnas en número a, que contenga cada una m bolas blancas y n negras; y urnas en número b, que con-

tenga cada una p bolas blancas y q negras; y procediendo como en el egemplo numérico de las dos urnas, hallaremos que la probabilidad de dirigir la mano á cualquiera de las urnas a, es $\frac{a}{a+b}$; y la probabilidad de sacar una bola blanca de estas urnas, cuando se ha dirigido la mano á ellas, es $\frac{m}{m+n}$; la de su concurso será pues $\frac{a}{a+b}\times\frac{m}{m+n}$. Del mismo modo la probabilidad del concurso de las dos probabilidades parciales para sacar una bola blanca de las urnas b es $\frac{b}{a+b}\times\frac{p}{p+q}$; y la suma de ambas probabilidades es

$$\frac{a}{a+b}\times\frac{m}{m+n}+\frac{b}{a+b}\times\frac{p}{p+q}=\frac{am(p+q)+bp(m+n)}{(a+b)(m+n)(p+q)}$$

y haciendo para abreviar $a+b=c$, $m+n=r$, $p+q=s$, se convierte la fraccion anterior en

$$\frac{ams+bpr}{crs}$$

Si se reducen á un mismo denominador las fracciones $\frac{m}{r}$ y $\frac{p}{s}$, resultarán las $\frac{ms}{rs}$, $\frac{pr}{rs}$, y se podrán reemplazar todas las urnas por una sola que contenga crs bolas, de las cuales sean $ams+bpr$ blancas; de donde se forma la probabilidad

espresada por la fraccion hallada poco hace, que es diferente de la fraccion $\frac{am+bp}{ar+bs}$, que resulta de dividir el número actual de bolas blancas por el número total y actual de bolas; porque el número actual de bolas blancas es $am+bp$, y el número total de bolas es $ar+bs$; y suponiendo todas las bolas reunidas, seria la probabilidad de sacar una blanca $\frac{am+bp}{ar+bs}$, fraccion que es diferente de la verdadera que ya hemos sacado $\frac{ams+bpr}{crs}$.

Pero esta desigualdad desaparece, 1.° cuando el número de bolas es el mismo en cada urna; porque entonces $r=s$, y

$$\frac{ams+bpr}{crs}=\frac{am+bp}{ar+bs};$$

porque siendo $r=s$ se tendrá

$$\frac{ams+bpr}{crs}=\frac{amr+bpr}{cr^2}=\frac{am+bp}{cr}=\frac{am+bp}{(a+b)r}=\frac{am+bp}{ar+br}=\frac{am+bp}{ar+bs}.$$

2.° Cuando en todas las urnas hay la misma razon entre el número de las bolas blancas y el de las negras; porque si llamamos h esta razon, se tendrá segun los principios de la aritmética,

$$n=hm;\ q=hp;\ r=m(1+h),\ s=p(1+h),$$

con lo que las espresiones $\frac{ams+bpr}{crs}$ y $\frac{am+bp}{ar+bs}$

se reducen una y otra á $\frac{1}{1+h}$ luego serán iguales; porque

$$\frac{am+bp}{ar+bs}=\frac{am+bp}{a(m+mh)+b(p+ph)}=\frac{am+bp}{am+amh+bp+bph}$$

y dividiendo sus dos términos por el numerador, se reduce á

$$\frac{1}{1+h}: \text{ y } \frac{ams+bpr}{crs}=\frac{am(p+ph)+bp(m+mh)}{(a+b)(p+ph)(m+mh)}$$

$$=\frac{amp+amph+bpm+bpmh}{apm+2amph+amph^2+bpm+2bpmh+bpmh^2}$$

que dividiendo sus dos términos por el numerador, se reduce

tambien á $\frac{1}{1+h}$

Determinacion de las probabilidades en las pruebas repetidas de los mismos lances.

22. Este género de probabilidades se determina por medio de las probabilidades compuestas. Si nos proponemos, por egemplo, sacar dos veces seguidas el punto 6 tirando dos veces el mismo dado, equivale esto al concurso de dos acontecimientos, cuyas probabilidades simples son $\frac{1}{6}$ para cada uno: será, pues, la probabilidad de sacar dos veces el 6, $\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$; del mismo modo hallarémos que la probabilidad de no sacar el 6 en ninguna de las dos tiradas es $\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{25}{36}$. La suma de estas dos probabilidades no es 1; porque ademas de los acontecimientos que acabamos de considerar, puede suceder que se saque el 6 á la primera tirada y á la segunda no, ó que no se saque á la pri-

mera y sí á la segunda: la probabilidad de sacar el 6 á la primera tirada es $\frac{1}{6}$, y la de que á la segunda salga cualquiera de los otros puntos, y no salga el 6 es $\frac{5}{6}$, y el concurso de estas dos probabilidades es $\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{5}{36}$. Del mismo modo la probabilidad de que el 6 no salga sino á la segunda tirada es $\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{5}{36}$; y sumando todas las probabilidades de los cuatro acontecimientos posibles, se tiene

$$\frac{1}{36}+\frac{25}{36}+\frac{5}{36}+\frac{5}{36}=\frac{36}{36}=1.$$

Asimismo la probabilidad de sacar el 6 tres veces seguidas en tres tiradas del mismo dado es $\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{216}$, y la de no sacarlo en ninguna de las tres tiradas es $\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{125}{216}$. Ademas de estos dos acontecimientos hay todavía otros seis que tambien son posibles, que son: la de sacar el 6 á la primera tirada, y en las otras dos no; la de sacarlo á la segunda, y en las otras dos no; la de sacarlo á la tercera, y no en las dos primeras; la de sacarlo en las dos primeras, y en la tercera no; la de sacarlo en la primera y tercera, y en la segunda no; y la de no sacarlo sino en las dos últimas tiradas: las probabilidades respectivas de estos seis lances son

$$\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{25}{216};\ \frac{5}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{25}{216};\ \frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{25}{216};\ \frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{5}{216};$$

$$\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{5}{216}\ \text{y}\ \frac{5}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{5}{216}.$$

La suma de las probabilidades de estos ocho acontecimientos es igual á la unidad, porque se han considerado todos los lances posibles; en efecto

$$\frac{1}{216}+\frac{125}{216}+\frac{5}{216}+\frac{5}{216}+\frac{5}{216}+\frac{25}{216}+\frac{25}{216}+\frac{25}{216}=\frac{216}{216}=1.$$

23. Discurriendo del mismo modo es fácil sacar la probabilidad de los lances que pueden ocurrir tirando cuatro, cinco, seis, etc. veces el mismo dado; pero en vez de calcular así una despues de otra las diversas probabilidades de los acontecimientos que resultan de las tiradas sucesivas del mismo dado, se pueden obtener todas de una vez por medio de una misma fórmula. Para esto basta considerar, que si en una prueba hay m

lances que produzcan el acontecimiento A, y n lances que produzcan el acontecimiento B, la probabilidad de sacar una vez A en una tirada será $\frac{m}{m+n}$, y la de sacar una vez B $\frac{n}{m+n}$.

Si consideramos dos tiradas, el producto de $(m+n)(m+n)$ abrazará todos los órdenes posibles de lances en las dos tiradas (10), y habrá por consiguiente entre ellos m^2 que darán la sucesion AA, mn la sucesion AB, nm la sucesion BA, y n^2 la sucesion BB; de suerte que la probabilidad de obtener los acontecimientos compuestos en este órden AA, AB, BA, BB, son respectivamente

$$\frac{m^2}{(m+n)^2},\ \frac{mn}{(m+n)^2},\ \frac{nm}{(m+n)^2},\ \frac{n^2}{(m+n)^2}.$$

Si no se quiere distinguir el órden de los acontecimientos AB y BA, y los consideramos como un mismo acontecimiento, entonces la probabilidad de obtener el uno ó el otro, será

$$\frac{2mn}{(m+n)^2};$$

de suerte que en este caso no habria sino tres clases de acontecimientos compuestos, que son: AA, AB y BB; cuyas probabilidades estarán espresadas por

$$\frac{m^2}{(m+n)^2},\ \frac{2mn}{(m+n)^2},\ \frac{n}{(m+n)^2},$$

cuyos numeradores son los términos del cuadrado del binomio $m+n$, y cuya suma es igual á la unidad.

Para comprender esto con toda claridad sacaremos en particular la probabilidad de cada clase de acontecimientos. Siendo

la probabilidad de sacar A en una tirada

$$\frac{m}{m+n},$$

y la de sacar B

$$\frac{n}{m+n},$$

la de sacar dos veces seguidas A en dos tiradas del mismo dado será

$$\frac{m}{m+n}\times\frac{m}{m+n}=\frac{m^2}{(m+n)^2}\ (22);$$

la de sacar AB en las mismas dos tiradas será

$$\frac{m}{m+n}\times\frac{n}{m+n}=\frac{mn}{(m+n)^2};$$

la de sacar BA será

$$\frac{n}{m+n}\times\frac{m}{m+n}=\frac{mn}{(m+n)^2};$$

y la de sacar BB

$$\frac{n}{m+n}\times\frac{n}{m+n}=\frac{n^2}{(m+n)^2}.$$

No haciendo distincion de las sucesiones AB y BA, la probabilidad de sacar AB ó BA, será la suma de las dos probabilidades

$$\frac{mn}{(m+n)^2}\ \text{y}\ \frac{mn}{(m+n)^2}=\frac{2mn}{(m+n)^2}.$$

24. Por este mismo órden se hallan las diversas probabilidades para un número cualquiera de pruebas ó tiradas en el desarrollo de

$$(m+n)^x = m^x + \frac{x}{1} m^{x-1} n + \frac{x(x-1)}{1.2} m^{x-2} n^2 + \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3} m^{x-3} n^3$$
&c

$$\ldots\ldots + \frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-q+1)}{1.2.3\ldots\ldots q} m^{x-q} n^q + n^x.$$

El primer término m^x indica el número de lances que en un número x de pruebas dan x veces el acontecimiento A.

El segundo término $\frac{x}{1} m^{x-1} n$ el número de lances que dan $x-1$ veces el acontecimiento A y una vez el acontecimiento B, sin distincion del órden de sucederse.

El término general

$$\frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-q+1)}{1.2.3\ldots q} m^{x-q} n^q,$$

indica el número de lances que dan $x-q$ veces el acontecimiento A y q veces el acontecimiento B, sin distincion de órden.

Y el último término n^x el número de lances que dan x veces el acontecimiento B.

Si se exigiese una sucesion determinada, se deberian suprimir los coeficientes; así como en el egemplo anterior la probabilidad de las sucesiones AB ó BA es

$$\frac{2mn}{(m+n)^2}$$

cuando no se hace distincion del órden de suceder, y

$$\frac{mn}{(m+n)^2}$$

cuando se distingue dicho órden.

Dividiendo ahora cada uno de los términos de la fórmula general por el número total de lances que es $(m+n)^r$, se tendrán las probabilidades de cada una de las sucesiones simples de los acontecimientos á que se refieren.

25. Si queremos una demostracion directa de estas aserciones, designaremos por

$$m' \text{ y } n', \; m'' \text{ y } n'', \; m''' \text{ y } n''' \text{ etc.}$$

el número de lances que producen el acontecimiento A y B á la primera, á la segunda, á la tercera etc. prueba, y desarrollaremos los productos $(m'+n')(m''+n'')(m'''+n''')$, y será el primero

$$m'm''+m'n''$$
$$+n'm''+n'n''$$

y el segundo

$$m'm''m'''+m'm''n'''$$
$$+m'n''m'''+m'n''n'''$$
$$+n'm''m'''+n'm''n'''$$
$$+n'n''m'''+n'n''n''' \text{ etc.}$$

Por lo dicho en el n.º 18 un término cualquiera de estos productos espresará el número de lances que dan el acontecimiento compuesto de los acontecimientos simples A y B, repetidos el primero tantas veces como la letra m se halle en dicho término, y el segundo tantas veces como se halle la letra n, señalando los acentos el órden de las pruebas. Por egemplo los términos

$$\left.\begin{matrix} m'm''n''' \\ m'n''m''' \\ n'm''m''' \end{matrix}\right\} \text{ corresponden á } \left\{\begin{matrix} AAB \\ ABA \\ BAA \end{matrix}\right.$$

Si se supone que $m'=m''=m'''=m$, y $n'=n''=n'''=n$, entonces el producto $(m'+n')(m''+n'')(m'''+n''')$ se convertirá

en $(m+n)^3$, y los términos indicados poco hace se convertirán en m^2n, que será el número de los lances relativos á cada uno de los tres acontecimientos designados, distintos cuando se fija el órden de sucesion de los acontecimientos simples de que se componen.

Pero si se prescinde de este órden, no formarán entonces sino un solo acontecimiento correspondiente á la suma de todos sus lances, es decir á $3m^2n$, espresion que no difiere de m^2n sino por el coeficiente que este producto adquiere en el desarrollo de $(m+n)^3$. Luego queda probado que deben suprimirse los coeficientes cuando se exige un órden determinado en la sucesion de los acontecimientos.

26. El desarrollo general

$$\frac{m^x}{(m+n)^x}+\frac{x}{1}\frac{m^{x-1}n}{(m+n)^x}+\frac{x(x-1)}{1.2}\frac{m^{x-2}n^2}{(m+n)^x}+\text{etc.},$$

del que se sacan todas las probabilidades de los diversos acontecimientos compuestos que puede ofrecer un número x de pruebas (23), se convierte en una fórmula mas sencilla, haciendo

$$\frac{m}{m+n}=e, \text{ y } \frac{n}{m+n}=1-e=f;$$

entonces dicho desarrollo se muda en

$$e^x+\frac{x}{1}e^{x-1}f+\frac{x(x-1)}{1.2}e^{x-2}f^2\ldots\ldots$$

$$+\frac{x(x-1)(x-2\ldots.(x-q+1)}{1.2.3\ldots.q}e^{x-q}f^q+f^x;$$

en cuya fórmula un término tomado aisladamente espresa la probabilidad de un acontecimiento compuesto de A repetida tantas veces como lo señale el esponente de e, y de B repetida tantas veces como lo indique el esponente de f.

27. Puede suceder que no se fije de una manera precisa el

número de repeticiones del mismo acontecimiento, sino que se le señale un límite solamente; como si se buscase la probabilidad de no sacar menos de $x-1$ acontecimientos A en el número x de pruebas, condicion que se cumple tambien aun cuando se obtuviese x veces el acontecimiento A, y á la que satisfacen por consiguiente los dos primeros términos de la última fórmula; la probabilidad, pues, de estos dos acontecimientos estará indicada por

$$e^x + \frac{x}{1} e^{x-1} f$$

suma de los dos primeros términos.

Del mismo modo la suma de los tres primeros

$$e^x + \frac{x}{1} e^{x-1} f + \frac{x(x-1)}{1.2} e^{x-2} f^2,$$

indicará la probabilidad de no sacar menos de $x-2$ acontecimientos A, ni mas de 2 acontecimientos B.

Y en general la suma de todos los términos de la fórmula desde el primero hasta el que está afectado de $e^{x-q} f^q$, es decir

$$e^x + \frac{x}{1} e^{x-1} f \ldots + \frac{x(x-1)\ldots(x-q+1)}{1.2\ldots q} e^{x-q} f^q,$$

indicará la probabilidad de no sacar menos de x-q acontecimientos A, ni mas de q acontecimientos B.

Si, por egemplo, se pide la probabilidad de sacar el punto 4 á lo menos 2 veces en cinco tiradas sucesivas del mismo dado, siendo este de seis caras, se hará

$$e = \tfrac{1}{6},\ f = \tfrac{5}{6},\ x = 5.$$

y resultará la probabilidad

$$e^5 + 5e^4 f + 10e^3 f^2 + 10e^2 f^3 = \frac{1}{6^5} + 5\frac{1.5}{6^5} + 10\frac{1.25}{6^5} + 10\frac{1.125}{6^5}$$

$$= \frac{1+25+250+1250}{6^5} = \frac{1526}{7776}.$$

Si se hubiese exigido solamente sacar el 4 al menos una vez, hubiera sido necesario tomar los cinco primeros términos del desarrollo de $(e+f)^5$; pero como $e+f=1$, y por consiguiente $(e+f)^5=1$, la suma de los cinco primeros términos será igual á $1-f^5$; y es mas fácil calcular el término f^5 y restarlo de la unidad, lo que dará

$$1-\frac{5^4}{6^5}=1-\frac{3125}{7776}=\frac{4651}{7776}$$

para la probabilidad pedida; la que siendo mayor que $\frac{1}{2}$, manifiesta que es *probable* que el punto 4 salga una vez en cinco tiradas.

La probabilidad del acontecimiento contrario, esto es, de que no salga ni una vez siquiera el punto 4 en las cinco tiradas es $f^5=\frac{3125}{7776}$, porque no conteniendo el término f^5 á la e, indica solamente la repeticion de los acontecimientos B. Se ha determinado la probabilidad pedida por medio de su contraria; y así se debe hacer siempre que la espresion de esta sea mas sencilla que la de la primera.

28. Se ve por el egemplo anterior que la probabilidad de sacar el punto 4, que no es mas de $\frac{1}{6}$ á la primera prueba, va creciendo por la repeticion de las tiradas del dado. Esto puede dar motivo á la cuestion siguiente: *determinar el número de pruebas necesario para que un acontecimiento adquiera una probabilidad dada.* Si se pidiese en cuantas tiradas del mismo dado se obtendria la probabilidad a de que el punto 6 salga al menos una vez, se tendria $e=\frac{1}{6}$, $f=\frac{5}{6}$, $a=x-1$ (porque la condicion propuesta abraza todos los términos menos el último), y se deberia determinar x con la condicion de que la suma de los términos

$$e^x+\frac{x}{1}e^{x-1}f\ldots\ldots+\frac{x}{1}ef^{x-1}$$

fuese igual á a, lo que no se podria hacer sino por ensayos repetidos; pero tomando la probabilidad contraria espresada por el término f^x, que en la hipótesis establecida debe ser igual á $1-a$, se tendrá, haciendo $1-a=b$, la ecuacion

$$f^x = b, \text{ de donde } x \log. f = \log. b,\ x = \frac{\log. b.}{\log. f.}$$

Si sustituimos á las letras f y b las fracciones

$$\frac{n}{s},\ \frac{r}{t},$$

se hallará

$$x = \frac{l.\frac{r}{t}}{l.\frac{n}{r}} = \frac{l.t.-l.r.}{l.s.-l.n}$$

Con esta fórmula podemos resolver la cuestion siguiente: *hallar el número necesario de tiradas de dos dados en que haya tanta probabilidad de sacar los dos seises ó las senas, como de no sacarlas.* En este caso tendremos

$$b = \tfrac{1}{2},\ e = \tfrac{1}{36},\ f = \tfrac{35}{36}\ (10);$$

de donde sacaremos

$$x = \frac{l.2}{l.36 - l.35} = 24,6;$$

lo cual manifiesta que el acontecimiento propuesto es menos probable que su contrario, cuando no se abrazan mas de 24 pruebas; y mas probable cuando se abrazan 25.

29. Las probabilidades simples se pueden determinar tambien por medio de las de los acontecimientos compuestos. Por ejemplo, *conociendo un jugador que en una partida formada de tres puntos puede ceder dos de ellos á su contrario, para que haya igualdad entre los dos, se pide la probabilidad que tiene el primer jugador de ganar un punto.*

De la propuesta se infiere que tiene la probabilidad $\frac{1}{2}$ de ganar los tres puntos seguidos, porque perderia el juego si su contrario ganase uno antes: tendremos, pues, en este caso

$$e^3 = \tfrac{1}{2}, \text{ de donde } e = \sqrt[\frac{1}{3}]{2}$$

que se reduce casi á 0,7937 un poco menos de $\frac{4}{5}$.

Si el primer jugador no cediese sino uno de los tres puntos, entonces los lances en su favor serian ó ganar los tres puntos seguidos, ó á lo menos tres en cuatro tiradas, porque si perdiera dos golpes, ganaria su contrario la partida; así que se tendria

$$e^4+4e^3f=\frac{1}{2}$$

y poniendo en lugar de f su valor $1-e$, se convierte la espresion anterior en

$$e^4+4e^3\times(1-e)=e^4+4e^3-4e^4=4e^3-3e^4=\frac{1}{2};$$

y resolviendo esta última ecuacion por medio de las ecuaciones numéricas, se halla 0, 6143.

30. Una vez que los términos del desarrollo $(m+n)^x$ indican los lances favorables á cada uno de los acontecimientos compuestos, que, en un número x de pruebas pueden resultar de las diversas sucesiones de los acontecimientos simples A y B, es fácil *determinar cuál de estos acontecimientos tiene mas lances en su favor, y es por consiguiente mas probable.* Para esto no hay mas que buscar cuál de los términos del desarrollo $(m+n)^x$ tiene un valor mas considerable.

Si se hace $m=n$, el término mayor será aquel que ocupe el medio de la fórmula cuando el número x sea par, y cuando este número sea impar, habrá entonces enmedio del desarrollo dos términos consecutivos que serán iguales entre sí y mayores que cualquiera de los otros, como se puede ver en las primeras potencias del binomio $m+n$

$$(m+n)^2=m^2+2mn+n^2$$

$$(m+n)^3=m^3+3m^2n+3mn^2+n^3$$

$$(m+n)^4=m^4+4m^3n+6m^2n^2+4mn^3+n^4$$

$$(m+n)^5=m^5+5m^4n+10m^3n^2+10m^2n^3+5mn^4+n^5.$$

Siendo $m=n$ los desarrollos de estas cinco potencias del binomio se convierten en

$m^2+2m^2+m^2$

$m^3+3m^3+3m^3+m^3$

$m^4+4m^4+6m^4+4m^4+m^4$

$m^5+5m^5+10m^5+10m^5+5m^5+m^5$;

donde se observa que los términos de enmedio de las potencias pares $2m^2$ y $6m^4$, son respectivamente los mas considerables, porque tienen el mayor coeficiente, siendo una misma la cantidad que afectan; así como tambien se ve que en las potencias impares hay enmedio de sus desarrollos dos términos iguales $3m^3$ y $10m^5$, que tambien son los mayores. De aquí se infiere que si se considera un juego en que el número de lances sea el mismo en favor del acontecimiento *A* que de su contrario *B*, que es la hipótesis $m=n$. los acontecimientos compuestos mas probables serán, 1 vez *A* y 1 vez *B* en 2 pruebas; 2 veces *A* y 2 veces *B* en 4 pruebas, y así de las demas cuando el número de pruebas es par. Pero cuando este número sea impar, habrá en cada prueba dos acontecimientos compuestos de igual probabilidad y mayor que las de todos los demas, á saber: 2 veces *A* y 1 vez *B*, ó 2 veces *B* y 1 vez *A* en 3 pruebas; 3 veces *A* y 2 veces *B*, ó 3 veces *B* y 2 veces *A* en 5 pruebas, y así de las demas.

Las probabilidades de estos diversos acontecimientos son;

para 1 vez *A* y 1 vez *B*, $\dfrac{2\,m^2}{(m+m)^2}=\dfrac{2\,m.\,m}{4\,m.\,m}=\frac{2}{4}$

2 veces *A* y 2 veces *B*, $\dfrac{6\,m^4}{(m+m)^4}=\dfrac{6}{16}=\dfrac{3}{8}$

3 veces *A* y 3 veces *B*, $\dfrac{20\,m^6}{(m+m)^8}=\dfrac{20}{64}=\dfrac{5}{16}$

4 veces *A* y 4 veces *B*, $\dfrac{70\,m^8}{(m+m)^8}=\dfrac{70}{256}=\dfrac{35}{128}$

:

2 veces A y 1 vez B, ó
2 veces B y 1 vez A,

$$\frac{3\,m^3}{(m+m)^3} = \frac{3}{8}$$

3 veces A y 2 veces B, ó
2 veces A y 3 veces B,

$$\frac{10\,m^5}{(m+m)^5} = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}$$

4 veces A y 3 veces B, ó
4 veces B y 3 veces A,

$$\frac{35\,m^7}{(m+m)^7} = \frac{35}{128}.$$

31. Estas diversas probabilidades van decreciendo á medida que aumenta el número de pruebas, lo cual es muy sencillo; porque aunque cada una sea la mayor de todas las que nacen del número de pruebas de que hace parte, no corresponde sin embargo sino á uno solo de los acontecimientos compuestos, que se multiplican á medida que se abraza un número mayor de pruebas; y como la suma de todas las probabilidades de un desarrollo es igual á 1, cuanto mayor sea el número de términos, mas dividida estará entre ellos la unidad.

32. No sucede asi con las probabilidades relativas de los diversos acontecimientos compuestos que da el mismo número de pruebas. Por ejemplo, la probabilidad de sacar 1 vez A y 1 vez B mas bien que 2 veces seguidas A, siendo el cociente de la probabilidad absoluta de estos diversos acontecimientos dividida por la suma de las probabilidades de los dos (14), se tendrá

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} = \frac{2}{3};$$

La probabilidad de sacar 2 veces A y dos veces B, mas bien que 4 veces A de seguida, es

$$\frac{\frac{3}{8}}{\frac{3}{8}+\frac{1}{16}} = \frac{6}{7} \text{ que es } > \frac{2}{3}$$

la de sacar 3 veces *A* y 3 veces *B* mas bien que 6 veces *A* de seguida, es

$$\frac{\frac{5}{16}}{\frac{5}{16}+\frac{1}{64}}=\frac{20}{21}>\frac{6}{7};$$

La de sacar 4 veces *A* y 4 veces *B*, mas bien que 8 veces seguidas la *A*, es

$$\frac{\frac{35}{128}}{\frac{35}{128}+\frac{1}{256}}=\frac{70}{71}>\frac{20}{21}.$$

La de sacar 2 veces *A* y 1 vez *B*, ó 2 veces *B* y una vez *A* mas bien que 3 veces *A*, ó *B*, de seguida, es

$$\frac{\frac{3}{8}}{\frac{3}{8}+\frac{1}{8}}=\frac{3}{4};$$

La de sacar 3 veces *A* y 2 veces *B*, ó 3 veces *B* y 2 veces *A*, mas bien que 5 veces *A* ó *B* de seguida, es

$$\frac{\frac{5}{16}}{\frac{5}{16}+\frac{1}{32}}=\frac{10}{11}>\frac{3}{4};$$

y la de sacar 4 veces *A* y 3 veces *B*, ó 4 veces *B*, y 3 veces *A* mas bien que 7 veces seguidas *A* ó *B*, es

$$\frac{\frac{35}{128}}{\frac{35}{128}+\frac{1}{128}}=\frac{35}{36}>\frac{10}{11}$$

Continuando de esta manera el cálculo, se podrá inferir la diferencia de posibilidad entre los acontecimientos compuestos de la repeticion constante del mismo acontecimiento simple, y la de aquel cuya composicion se aproxime mas á la razon de posibilidad de los acontecimientos simples.

33. Es facil sacar las fórmulas generales de donde se dedu-

con todas las observaciones de los números anteriores; pues para esto no se necesita mas que calcular el término medio del desarrollo de una potencia par del binomio, ó los dos que ocupen el mismo lugar cuando la potencia es impar. La espresion del primero es

$$\frac{x(x-1)\ldots(x-\frac{x}{2}+1)}{1.\ 2\ldots\frac{x}{2}}\, m^{\frac{1}{2}x}\, n^{\frac{1}{2}x} = \frac{x(x-1)\ldots x(\frac{x}{2}+1)}{1.\ 2\ldots\frac{x}{2}}\, m^{x},$$

cuando $m=n$.

La de los otros dos es

$$\frac{x(x-1)\ldots(x-\frac{x-1}{2}+1)}{1.\ 2\ldots\frac{x-1}{2}}\, m^{\frac{1}{2}(x-1)}\, n^{\frac{1}{2}(x+1)}$$

$$= \frac{x(x-1)\ldots(\frac{x+1}{2}+1)}{1.\ 2\ldots\frac{x-1}{2}}\, m^{x}$$

34. Cuando m y n no son iguales, es decir, cuando no hay el mismo número de lances en favor de los acontecimientos simples A y B, *el acontecimiento compuesto mas probable es aquel en que el número de acontecimientos* A *es al de los acontecimientos* B; *como el número de lances favorables al primero es al número de lances favorables al segundo.*

Para comprender bien esta proposicion hagamos $m=3$, $n=2$; y hagamos sucesivamente $x=5,=10,=15$. Esto quiere decir que los lances en favor de *A* y de *B*, están en razon de

3 : 2. Esto supuesto, vamos á probar que de todos los acontecimientos compuestos, que pueden resultar de un número x de pruebas, el mas probable será aquel en que el número de acontecimientos A, sea al número de acontecimientos B, como 3: 2. En efecto, siendo $x=5$ el desarrollo de $(m+n)^5$ será

$$m^5+5m^4n+10m^3n^2+10m^2n^3+5mn^4+n^5;$$

donde se ve que el mayor término de este desarrollo es $10\,m^3\,n^2$, y por consiguiente este será el acontecimiento compuesto mas probable, y en él se verifica, que los acontecimientos A son á los acontecimientos B como 3: 2. Facil es conocer que este es el mayor término del desarrollo; pues sustituyendo en vez de m y n sus valores, y poniéndole á cada término el denominador que debe llevar, esto es, $(m+n)^5$, resultan las probabilidades

$$\frac{m^5}{(m+n)^5}=\frac{3^5}{5^5}=\frac{243}{3125} \text{ para 5 veces } A,$$

$$\frac{5\,m^4\,n}{(m+n)^5}=\frac{5.\,3.^4\,2}{5^5}=\frac{810}{3125} \text{ para 4 veces } A \text{ y 1 vez } B.$$

$$\frac{10\,m^3\,n^2}{(m+n)^5}=\frac{10.\,3.^3\,2^2}{5^5}=\frac{1080}{3125} \text{ para 3 veces } A \text{ y 2 veces } B,$$

$$\frac{10\,m^2\,n^3}{(m+n)^5}=\frac{10.\,3.^2\,2^3}{5^5}=\frac{720}{3125} \text{ para 2 veces } A \text{ y 3 veces } B,$$

$$\frac{5mn^4}{(m+n)^5}=\frac{5.\,3.\,2^4}{5^5}=\frac{240}{3125} \text{ para 1 vez } A \text{ y 4 veces } B,$$

$$\frac{n}{(m+n)^5}=\frac{2^5}{5^5}=\frac{32}{3125} \text{ para 5 veces } A,$$

Del mismo modo, siendo 10 ó 15 las pruebas, los desarrollos de $(m+n)^{10}$ y $(m+n)^{15}$ son, el primero

$$m^{10}+10m^9n+45m^8n^2+120m^7n^3+210m^6n^4+252m^5n^5+$$
$$210m^4n^6+120m^3n^7+45m^2n^8+10mn^9+n^{10};$$

y el segundo

$$m^{15}+15m^{14}n+105m^{13}n^2+455m^{12}n^3+1365m^{11}n\ +3003$$
$$m^{10}n^5+5005m^9n^6+6435m^8n^7+6435m^7n^8+5005m^6n\ +$$
$$3003m^5n^{10}+1365m^4n^{11}+455m^3n^{12}+105m^2n^{13}+15mn^{14}+n^{15}.$$

En cuyos desarrollos, sustituyendo en vez de m y n sus valores, se observa que en el de $(m+n)^{10}$ el término mas considerable es

$$\frac{210m^6n^4}{(m+n)^{10}}=\frac{210{,}3.^62}{5^{10}}=\frac{2449440}{9765625},$$

y en el de $(m+n)^{15}$ el término mas considerable lo es el

$$\frac{5005m^9n^6}{(m+n)^{15}}=\frac{5005.3^9.2^6}{5^{15}}=\frac{6304858560}{30517578125}$$

cuyas fracciones, que son las mayores de todas, como se puede comprobar, espresan la probabilidad de sacar 6 veces A y 4 veces B en 10 pruebas; y 9 veces A y 6 veces B, en 15 pruebas; y los números 6 y 4, 9 y 6 están en la misma razon que 3 : 2.

Si comparamos las tres fracciones $\frac{1080}{3125}$, $\frac{2449440}{9765625}$ y $\frac{6304858560}{30517578125}$, veremos que la tercera es menos que la segunda y esta menor que la primera; lo cual es conforme á lo dicho en el número 31; pero cada una de estas tres probabilidades es la mayor con relacion á todas las que se deducen del mismo desarrollo.

35. Como solo los múltiplos de 5 pueden dividirse en dos

números enteros que estén entre sí en razon de 3: 2, el desarrollo de las potencias, cuyo esponente no sea un múltiplo de 5, no contendrá términos en que los esponentes de las letras m y n estén en dicha razon; pero los términos que se aproximen mas á llenar esta condicion, serán los mas considerables, como lo vamos á ver por la determinacion algébrica de $(m+n)^x$.

Siendo el término general del desarrollo de $(m+n)^x$

$$\frac{x(x-1)(x-2)\ldots\ldots(x-q+1)}{1.\ 2.\ 3.\ldots q} m^{x-q} n^q,$$

se halla precedido del término

$$\frac{x(x-1)(x-2)\ldots\ldots(x-q+2)}{1.\ 2.\ 3.\ldots\ldots q-1} m^{x-q+1} n^{q-1}$$

y dividiendo por esta última espresion la primera, se tendrá el cociente

$$\frac{x-q+1}{q}\ \frac{n}{m} = \frac{xn-qn+n}{qm},$$

cuya fraccion será la razon de dos términos consecutivos tomados en un lugar cualquiera del desarrollo propuesto; valor que disminuye á medida que el número q aumenta. Segun esto es evidente, que un término será mayor ó menor que el que le precede segun que

$$\frac{xn-qn+n}{qm} > 1, \text{ó} < 1;$$

Si pues esta fraccion es mayor que 1, será el numerador $xn-qn+n > qm$; si á los dos miembros de esta desigualdad añadimos la cantidad qn, resultará $xn+n > qm+qn$; y dividiéndolos por $m+n$ se convertirá en $\frac{xn+n}{m+n} > q$. Del

mismo modo sacaremos que $q > \frac{xn + n}{m + n}$, cuando la fraccion anterior es menor que 1.

De aqui se infiere, que depende del valor de q el que sea mayor ó menor que la unidad la razon de dos términos consecutivos, y sujetándose el acrecentamiento de los términos consecutivos en dicho valor de q, dará este necesariamente el mayor término, desde el cual van decreciendo los demas hacia cada estremidad del desarrollo.

Si $\frac{xn + n}{m + n}$ fuese un número entero, tomándole por el valor de q, la razon de que se trata será precisamente igual á la unidad; y habrá por consiguiente dos términos consecutivos iguales entre sí y mayores que todos los demas.

Cuando $\frac{xn + n}{m + n}$ no es un número entero, sino otro mayor que q, se deberá tomar para valor de q el número entero inmediatamente menor que $\frac{xn + n}{m + n}$, de cuya fraccion no se diferenciará en una unidad, y estará por consiguiente compreendido entre

$$\frac{xn + n}{m + n} - 1 = \frac{xn - m}{m + n} \text{ y } \frac{xn + n}{m + n};$$

q es pues el número entero compreendido entre estos dos números cuya diferencia es $\frac{m + n}{m + n} = 1$.

Si se hace $x = r(m + n) = rm + rn$, haciendo los mismos raciocinios hallaremos que $q < rn + \frac{n}{m + n}$, y $q > rn - \frac{n}{m + n}$, porque la fraccion $\frac{x - q + 1}{q} \frac{n}{m} = \frac{xn - qn + n}{qm}$, se convierte,

poniendo en vez de x su valor, en

$$\frac{rmn+rn-qn+n}{qm};$$

cuya fraccion espresa la razon de dos términos consecutivos del desarrollo de $(m+n)^{rm+rn}$; y de dichos dos terminos será el anterior menor que el que le sigue ó mayor ó igual, segun que dicha fraccion sea mayor ó menor ó igual á la unidad. Si es mayor, se tiene

$$q < rn + \frac{n}{m+n}; \text{ y si es menor, } q > rn - \frac{n}{m+n};$$

luego q será el número entero compreendido entre $rn+\frac{n}{m+n}$ y $rn-\frac{n}{m+n}$; será pues q el número entero rn; y por consiguiente $x-q=rm+rn-rn=rm$.

De donde se infiere que de todos los acontecimientos compuestos que pueden presentarse en un número $r\,(m+n)$ de pruebas, el mas probable con respecto á los demas es el que corresponde al término afectado de $m^{x-q}\,n^q=m^{rm}\,n^{rn}$, en el cual los acontecimientos A y B están repetidos el uno rm veces y el otro rn, es decir, proporcionalmente á su probabilidad particular.

36. Suponiendo que sea M el término mas considerable del desarrollo de $(m+n)^x$, la probabilidad relativa del acontecimiento compuesto á que corresponde, y la del que corresponde á otro término cualquiera H, estará espresada por

$$\frac{M}{M+H}\ (14);$$

cuya fraccion se aproximará tanto mas á la unidad cuanto H sea mas pequeña con respecto á M; de donde se infiere con toda

generalidad la observacion hecha en los números 31 y 32, esto es: que aunque las probabilidades absolutas decrecen á medida que se abraza un mayor número de pruebas, las relativas por el contrario aumentan.

37 La teoría de las combinaciones y permutaciones hace un gran papel en la resolucion de los problemas pertenecientes al cálculo de las probabilidades, como lo hemos podido notar ya en algunos ejemplos, y como veremos en lo sucesivo. Esta teoría que sirve de fundamento á la demostracion mas elemental de la fórmula del binomio de Newton, se halla en todos los elementos de Algebra; pero en ellos no se divide mas que en dos grupos la totalidad de letras cuyas diversas combinaciones se buscan. Si queremos elevarnos á toda la generalidad de que es susceptible este objeto, es necesario determinar lo que debe suceder, cuando se divide en un número cualquiera de grupos el número dado de letras. Las fórmulas que conducen á este resultado, se hallan en el desarrollo de las potencias de los polinomios Discurriendo sobre los productos de los trinomios.

$$a' + b' + c',\ a'' + b'' + c'',\ a''' + b''' + c''', \text{ etc.}$$

como se ha hecho en el número 25 sobre los de los binomios $m' + n'$, $m'' + n''$, $m''' + n'''$, etc., se hallará por las leyes de la multiplicacion, que estos productos compreenden todas las combinaciones que se pueden hacer de las letras $a', b', c', a'', b'', c'', a'''$, b''' c''' etc., tomando una de ellas en cada factor del producto. de aqui se sigue que si las letras a', b', c', a'' b'' c'' etc, designan respectivamente el número de lances que producen los acontecimientos A, B, C, á la 1.ª, á la 2.ª, á la 3.ª prueba, un producto parcial cualquiera $a'b''c'''b''''$, por ejemplo, hará conocer el número de lances que corresponden á la sucesion de los acontecimientos simples $ABCB$.

Si se supone que

$$a' = a'' = a''' = a,\ b' = b'' = b''' = b,\ c' = c'' = c''' = c,$$

el producto

$$(a' + b' + c')\ (a'' + b'' + c'')\ (a''' + b''' + c''') \text{ etc.}$$

se mudará en el trinomio $a+b+c$ elevado á la potencia señalada por el número de factores, ó lo que es lo mismo, por el número de pruebas; en el mismo supuesto, como un término cualquiera $a' \, b'' \, c''' \, b''''$ de dicho producto se convierte en $a\,b^2\,c$, se hallará repetido tantas veces como productos diferentes se puedan formar, que contengan las letras a y c una vez cada una, y la letra b dos veces, sometidas alternativamente á los acentos $'$, $''$, $'''$, $''''$, ..., continuados hasta el número que señalen las pruebas.

Si suponemos que este número sea n, la espresion del término general del desarrollo de $(a+b+c)^n$ será

$$\frac{1.\ 2.\ 3 \ldots\ldots n}{1.\ 2 \ldots x \times 1.\ 2 \ldots s \times 1.\ 2 \ldots r}\, a^x b^s c^r, \text{ si } x+s+r=n$$

Si $n=4$, se tendrá para el término ab^2c

$$n=4,\ x=1,\ s=2,\ r=1,$$

y la fraccion anterior se convierte en

$$\frac{1.\ 2.\ 3.\ 4.}{1 \ldots \times 2 \ldots \times 1}\, a\,b^2\,c = 12\,ab^2c$$

Si se prescinde del órden en la sucesion de los acontecimientos, el término $12\,ab^2c$ del desarrollo de $(a+b+c)^4$, espresará el número de lances para obtener en 4 pruebas los acontecimientos A y C cada uno 1 vez, y 2 veces el acontecimiento B.

Del mismo modo, el término general

$$\frac{1.\ 2.\ 3 \ldots\ldots\ldots\ldots n}{1.\ 2 \ldots x \times 1.\ 2 \ldots s \times 1.\ 2 \ldots r}\, a^x\,b^s\,c^r$$

espresa el número de lances para obtener en un número $x+s+r$ de pruebas x acontecimientos A, s acontecimientos B, y r acontecimientos C. La espresion de mas arriba espresa el numerador

de una fraccion cuyo denominador es $(a+b+c)^{r+s+r}$, que es el número total de lances que pueden suceder.

Siendo el término general del desarrollo de

$(a+b+c+d+e)^n$

$$\frac{1.\ 2.\ 3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots n}{1.\ 2 \ldots x \times 1.\ 2 \ldots s \times 1.\ 2 \ldots r \times 1.\ 2 \ldots t \times 1.\ 2 \ldots u}\ a^x\ b^s\ c^r\ d^t\ e^u,$$

si $x+s+r+t+u=n$,

espresa el número de lances que pueden producir el acontecimiento compuesto de un número

x de acontecimientos *A*.
s . . . . *B*.
r . . . . *C*.
t . . . . *D*.
u . . . . *E*.

y la probabilidad de dicho acontecimiento compuesto se obtendrá dividiendo la espresion anterior por $(a+b+c+d+e)^x$, número total de lances.

Aqui del mismo modo que en el número 35, el mas probable de los acontecimientos compuestos que puede producir el mismo número de pruebas, es tambien aquel en que los acontecimientos simples entran proporcionalmente á sus probabilidades respectivas. Si v. g., se consideran 3 acontecimientos simples, y se hace $n=m(a+b+c)$, será facil probar que el mayor término del desarrollo de $(a+b+c)^{m(a+b+c)}$ es el término afectado de $a^{ma}\ b^{mb}\ c^{mc}$; porque haciendo $b+c=B$, y desarrollando $(a+B)^{ma+mB}$, se tendrá para mayor término aquel que está afectado de $a^{ma}\ B^{mB}$ (31), y sustituyendo ahora en vez de B^{mB} la espresion $(b+c)^{mb+mc}$ y desarrollándola, su mayor término será $b^{mb}\ c^{mc}$; luego el mayor término del producto $a^{ma}\ B^{mB}$ será el que está afectado de $a^{ma}\ b^{mb}\ c^{mc}$.

Del mismo modo se pueden hacer aqui las demas aplicaciones á que se han hecho de las potencias del binomio; y en general todo lo que concierne á las pruebas repetidas para un número cualquiera de acontecimientos simples, está comprendido en el desarrollo de las potencias, de un polinomio formado de la suma de los números que espresan los lances de donde resulta cada uno de estos acontecimientos.

Resolucion de varias cuestiones por medio de las probabilidades á priori.

CUESTION PRIMERA.

38. Un jugador apuesta que sacando cartas por debajo de una baraja, saldrá primero un *dos* que un *tres*: convenidos en esto, sacan por la parte de arriba un naipe y se halla ser un *tres*, ¿que probabilidad tiene de ganar?

Esta cuestion se resuelve facilmente por la consideracion de las probabilidades relativas (14). Si no se hubiese sacado ningun naipe por arriba, ignorándose la posicion de las cartas y sabiendo solamente que hay en la baraja tantos *doses* como *treses*, hubiéramos dicho, que tanta probabilidad habia para que ganase uno como otro, ó que cada uno tenia $\frac{1}{2}$ de probabilidad para ganar. Pero habiéndose sacado un *tres* por arriba, ya no quedan mas de 3 *treses* en la baraja; y por consiguiente los lances en favor del primer jugador serán $\frac{4}{40}$, mientras que los que quedan en favor del segundo no son mas de $\frac{3}{40}$; las probabilidades respectivas serán pues

$$\frac{\frac{4}{40}}{\frac{4}{40}+\frac{3}{40}}=\frac{4}{7} \text{ para el primer jugador}$$

$$\frac{\frac{3}{40}}{\frac{4}{40}+\frac{3}{40}}=\frac{3}{7} \text{ para el segundo.}$$

Si se sacasen dos naipes por arriba y fuesen 2 *treses*, la probabilidad de ganar el primer jugador sería

$$\frac{\frac{4}{40}}{\frac{4}{40}+\frac{2}{40}}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3},$$

y la del segundo

$$\frac{\frac{2}{40}}{\frac{4}{40}+\frac{2}{40}}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3};$$

y últimamente si se sacasen 3 *treses* y 1 *dos* por arriba, entonces las probabilidades serian

$$\frac{\frac{3}{40}}{\frac{3}{40}+\frac{1}{40}}=\frac{3}{4}$$ para el primero y $\frac{1}{4}$ para el segundo

CUESTION SEGUNDA.

39. Supongamos que apuesta un jugador que saldrá primero un *dos* que un *tres* sacando por debajo de la baraja: la carta que está encima no se sabe cuál es, pero se sabe que no es el *dos de oros*, ¿que probabilidad tiene de ganar?

Tambien resolveremos este ejemplo por medio de las probabilidades relativas; pero toda la dificultad de este problema consiste, en determinar los lances que tiene en su favor cada uno de los jugadores. Para averiguarlo, consideraremos, que segun el orden con que esten combinados los 40 naipes de la baraja, saldrá primero un *dos* ó un *tres*. Las combinaciones diferentes de las cuarenta cartas de la baraja son el producto de $1.\ 2.\ 3 \ldots\ldots\ 40=m$, y de este número de combinaciones la mitad, que es $\frac{1.\ 2.\ 3 \ldots\ldots\ 40}{2}=\frac{m}{2}$, haria ganar al primer jugador, y la otra mitad al segundo si se ignorase absolutamente el órden en que están combinados los 40 naipes; pero como se sabe que el *dos de oros* no está encima, habrá que rebajar del núme-

ro total de combinaciones, todas aquellas en que el *dos de oros* debiera ocupar la parte superior, esto es, habrá que rebajar 1. 2. 3.......... 39 $=s$ combinaciones, y el residuo espresará el número de combinaciones diferentes con que pueden estar combinadas las 40 cartas, sin que el *dos de oros* esté encima: la cuestion está pues reducida á averiguar cuantas de las combinaciones que se deben rebajar harian ganar al primer jugador, y cuantas á su contrario, para restar cada uno de estos números de los lances que corresponden á cada jugador. Ahora bien, el número de combinaciones que harian ganar al primer jugador, aun estando el *dos de oros* encima, es las tres séptimas partes del número s, que rebajadas del número $\frac{m}{2}$; dan $\frac{m}{2}-\frac{3.s}{7}=\frac{m.7-3.2.s}{2.7}$; y el número de combinaciones que harían ganar al segundo, estando el *dos de oros* encima, es las cuatro séptimas partes del número s, que rebajadas del número $\frac{m}{2}$ dan $\frac{m}{2}-\frac{4.s}{7}=\frac{m.7-4.s.2}{2.7}$: segun esto las probabilidades respectivas de los dos jugadores son, para el primero

$$\frac{m.\ 7-3.\ s.\ 2}{m.\ 7-4.\ s.\ 2+m.\ 7-3.\ s.\ 2.}$$

que poniendo en lugar de m y s sus valores se convierten en

$$\frac{1.\ 2.\ 3.....\ 40.\ 7-3.\ 1.\ 2.\ 3.....\ 39.\ 2}{1.2.3...40.7-4.1.2.3...39.2+1.2.3...40.7-3.1.2.3...39.2}$$

y quitando los factores comunes al numerador y denominador queda reducida esta fraccion á

$$\frac{40.\ 7-3.\ 2}{40.\ 7-4.\ 2+40.\ 7-3.\ 2}=\frac{274}{546}=\frac{137}{273}:$$

la probabilidad del segundo es

$$\frac{m.\ 7-4\ s.\ 2}{m.\ 7-4.\ s.\ 2+m.\ 7-3.\ s.\ 2}=$$

$$\frac{1.2.3\ldots\ldots40.7-4.\ 1.2.3\ldots\ldots39.2}{1.2.3\ldots40.7-4.1.2.3\ldots39.2+1.2.3\ldots40.7-3.1.2.3\ldots39.2}$$

$$=\frac{40.7-4.2}{40.7-4.2+40.7-3.2}=\frac{272}{546}=\frac{136}{273}.$$

Las únicas dudas que pueden ocurrirse con respecto á este problema, son las dos siguientes: 1.ª si el número *s* representa en realidad las combinaciones en que el *dos de oros* ocupa la parte superior.

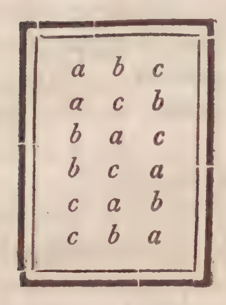
Pero esto es fácil de entender; pues suponiendo que en la baraja falte el *dos de oros*, se pueden hacer con los 39 naipes restantes 1.2.3...... 39 combinaciones, en cada una de las cuales se puede colocar el *dos de oros* encima.

2.ª Si de este número *s* los $\frac{3}{7}$ harian ganar al primer jugador y los otros $\frac{4}{7}$ al segundo.

Esto es evidente, pues no contando con el *dos de oros* que ocupa la parte superior en dicho número *s* de combinaciones, las otras 39 cartas restantes estarán combinadas de todas las maneras posibles, y como entre ellas se encuentran 3 *doses* y 4 *treses*, las combinaciones en que venga un *dos* ó un *tres* delante estarán divididas en razon de 3:4.

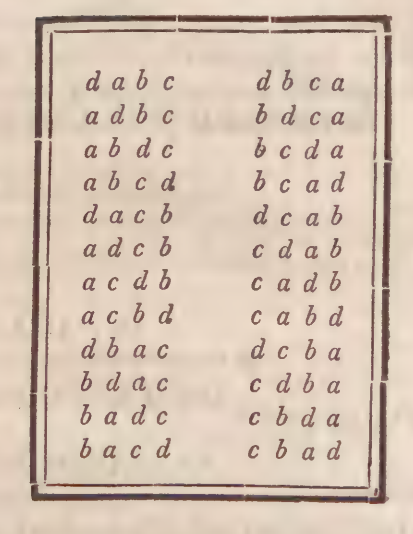
Para convencernos prácticamente de esto, hagamos todas las combinaciones posibles primero con 3, y luego con 4 letras, que son las siguientes:

con 3 letras
1.2.3. = 6
combinaciones.



a	*b*	*c*
a	*c*	*b*
b	*a*	*c*
b	*c*	*a*
c	*a*	*b*
c	*b*	*a*

con 4 letras 1.2.3.4. = 24
combinaciones.



d a b c	*d b c a*
a d b c	*b d c a*
a b d c	*b c d a*
a b c d	*b c a d*
d a c b	*d c a b*
a d c b	*c d a b*
a c d b	*c a d b*
a c b d	*c a b d*
d b a c	*d c b a*
b d a c	*c d b a*
b a d c	*c b d a*
b a c d	*c b a d*

Si suponemos ahora en las combinaciones de 3 letras que siempre que la *a* esté delante gana un jugador, y que cuando esté delante la *b* ó la *c* gana el otro, hallaremos 2 lances en favor del primero y 4 en favor del segundo, es decir en razon de 1:2; lo mismo que se observa en las combinaciones de 4 letras, en las que en 8 de ellas está delante la *a*, y en las otras 16 estan delante la *b* ó la *c*, es decir, en razon de 1:2. Lo mismo sucederia aunque las combinaciones fuesen de muchas mas letras; pues cada una de ellas estará delante un número de veces igual al de cada una de las otras, y por lo mismo el número de veces que una letra se halle delante, es al número de veces que se hallen delante otras dos letras como 1:2; y el número de veces que se hallen delante dos letras es al en que se hallen delante otras tres letras, como 2:3; y generalmente el número de veces que alternativamente se hallen delante un número designado de letras, es al en que se encuentren primero otro número designado de letras, como el número de las primeras es al de las segundas. Así que en el problema que nos ocupa, en el número *s* de combinaciones, en el que el *dos de oros* está encima, los

otros 3 *doses* estarán delante con respecto á los 4 *treses* en la misma razon que 3:4.

Con estas observaciones nos será muy fácil resolver los demas problemas de este género que se puedan proponer, como si se pidiese, por egemplo, la probabilidad que tiene cada uno de los dos jugadores en la misma cuestion, en la suposicion que se sepa que ninguno de los 4 *doses* está encima.

En este caso la probabilidad del 1.° sería

$$\frac{1.2.3....40.7-1.2.3....39.4.3.2.}{1.2.3....40.7-1.2.3....39.4.4.2+1.2.3....40.7-1.2.3....39.4.3.2.}$$

$$=\frac{40.7-4.3.2}{40.7-4.4.2+40.7-4.3.2.}=\frac{256}{504}=\frac{32}{63};$$

y la del 2.°

$$\frac{1.2.3....40.7-1.2.3....39.4.4.2}{1.2.3....40.7-1.2.3....39.4.4.2+1.2.3....40.7-1.2.3....39.4.3.2}$$

$$=\frac{40.7-4.4.2}{40.7-4.4.2+40.7-4.3.2}=\frac{248}{504}=\frac{31}{63}.$$

CUESTION TERCERA.

40. Un jugador apuesta contra otro que tirando 7 veces un dado de seis caras sacará lo menos dos veces el punto 6, y el contrario apuesta que tirándolo 9 veces sacará al menos 3 veces el punto 6, ¿qué probabilidad tienen de ganar?

Por la fórmula del n.° 27 se ve que el primero tiene la probabilidad

$$e^7+7e^6f+21e^5f^2+35e^4f^3+35e^3f^4+21e^2f^5=$$

$$\frac{1}{6^7}+7\frac{1.5}{6^7}+21\frac{1.25}{6^7}+35\frac{1.125}{6^7}+35\frac{1.625}{6^7}+21\frac{1.3125}{6^7}=\frac{7703}{23328}$$

y el segundo

$$e^9+9e^8f+36e^7f^2+84e^6f^3+126e^5f^4+126e^4f^5+84e^3f^6$$

$$=\frac{1796446}{10077696}=\frac{898223}{5038848}$$

y comparando ahora las dos probabilidades últimas, hallaremos

$$\frac{\frac{7703}{23328}}{\frac{7703}{23328}+\frac{898223}{5038848}}=\frac{38814246144}{59768109928}=0,6494$$

para el primer jugador; y

$$\frac{\frac{898223}{5038848}}{\frac{898223}{5038848}+\frac{7703}{23328}}=\frac{20953863784}{59768109928}=0,3505$$

para el segundo.

CUESTION CUARTA.

41. ¿Cuántas veces se debe tirar un dado de seis caras para tener una probabilidad igual á $\frac{19}{23}$ de sacar el 6 á lo menos una vez?

Este egemplo se resuelve por la fórmula del n.° 38, en la que todos los términos, menos el último, deben sumar $\frac{19}{23}$, y el último $\frac{4}{23}$; será pues

$$f^x=\frac{4}{23} \text{ de donde } x=\frac{l.23-l.4}{l.6-l.5}=9,59;$$

lo que manifiesta que abrazando mas de 9 tiradas, se tiene una probabilidad superior á $\frac{19}{23}$ de sacar el 6 á lo menos una vez.

Si se pidiese el número de tiradas necesario para tener una probabilidad de $\frac{4}{5}$ de sacar los cuatro *seises* tirando 4 dados,

entonces

$$x = \frac{l.5}{l.1296 - l.1295} = 2055,79;$$

últimamente para que haya tanta probabilidad de sacar las senas como para no sacarlas tirando con los mismos 4 dados, se necesitan

$$x = \frac{l.2}{l.1296 - l.1295} = 885,38 \text{ tiradas}$$

CUESTION QUINTA.

42. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden combinar las 40 cartas en el juego del *tresillo*, ó cuántos son los lances de este juego?

Para resolver esta cuestion, tendremos presente lo dicho acerca de las potencias de los polinomios en el n.° 37. Considerando que en este juego cada uno de los tres jugadores tiene 9 cartas, y que quedan 13 sobrantes en el platillo, inferiremos que los lances de este juego estarán espresados por el coeficiente de $a^9b^9c^9d^{13}$ en el desarrollo de $(a+b+c+d)^{40}$, el cual es

$$\frac{1.2.3\ldots\ldots40}{1.2.3\ldots9 \times 1.2.3\ldots9 \times 1.2.3\ldots9 \times 1.2.3\ldots\ldots13},$$

que suprimiendo los factores comunes al numerador y denominador, se reduce á

$$2.^7 3.^2 5.^2 7.^2 13.^2 17.19.23.29.31 = 15928149470688 00$$

número de disposiciones diferentes en que pueden quedar repartidas las 40 cartas entre los 3 jugadores y el platillo. Suponiendo que la 100ª parte de los 600000000 de habitantes que se regulan en el mundo sepan este juego, que se dividan en ternas, y jueguen en efecto cuatro horas cada dia: suponiendo tambien que un juego con otro dure 3 minutos, se necesitarian 1565098 0534

años para que se verificasen todas lás combinaciones del tresillo; y esto en el supuesto de no repetirse ninguna. Sin embargo, no debe creerse que ascienda á tanto el número de lances esencialmente diferentes del tresillo. Hay juegos, por ejemplo, que son imperdibles de cualquier modo que esten distribuidas las demas cartas, y de cualquier modo que se jueguen. Un juego de 7 triunfos de *espada*, *mala*, *punto*, *rey*, *caballo*, *seis* y *cinco*, es imperdible; y tambien lo es otro de *espada*, *punto*, *rey*, *caballo*, *sota*, *tres y seis*, *etc.*

CUESTION SESTA.

43. Cuatro jugadores A, B, C, D han reunido 15 fichas en una urna, de las que 9 son blancas y 6 negras, y han convenido en que el primero que saque una ficha negra ganará el juego. El jugador A es el 1.° que debe sacar, B el 2.°, C el 3.°, y D el 4.°, y así en este órden: las fichas que se sacan de la urna no se vuelven á meter en ella, ¿qué probabilidad tiene cada uno de ganar?

Supongamos m el número de fichas blancas y n el de las negras; la probabilidad de sacar una negra será $\frac{n}{m+n}$ y la de sacar una blanca $\frac{m}{m+n}$, y como segun las condiciones del juego no se acaba éste aunque se saque una ficha blanca, será tambien $\frac{m}{m+n}$ la probabilidad de que se pasará á la segunda tirada, ó de que tendrá lugar la segunda tirada: para que ésta se verifique, habrá sido necesario que se sacase una blanca en la tirada anterior; así que en esta segunda tirada quedarán $m-1$ fichas blancas, y las probabilidades en esta tirada serán

$\frac{m-1}{m-1+n}$ de sacar una blanca,

$\frac{n}{m-1+n}$ de sacar una negra.

Estas probabilidades deben multiplicarse por la de que tendrá lugar la segunda tirada para obtener las probabilidades de los dos acontecimientos que de ella resultan (17), lo que dará

$\frac{m-1}{m-1+n} \times \frac{m}{m+n}$ de sacar una blanca el jugador B

$\frac{n}{m-1+n} \times \frac{m}{m+n}$ de sacar una negra.

Si B saca una blanca, ya no quedarán en la urna mas de $m-2$ fichas blancas, y discurriendo para la tercera tirada como para la segunda, hallaremos $\frac{m-2}{m-2+n}$ de sacar una blanca, y $\frac{n}{m-2+n}$ de sacar una negra; y multiplicando estas probabilidades por la de que se pasará á la tercera tirada, que es

$$\frac{m-1}{m-1+n} \times \frac{m}{m+n} = \frac{m(m-1)}{(m+n)(m-1+n)},$$

tendremos $\frac{m(m-1)}{(m+n)(m-1+n)} \times \frac{n}{m-2+n}$ de sacar una negra, ó en favor del jugador C,

$$\frac{m(m-1)}{(m+n)(m-1+n)} \times \frac{m-2}{m-2+n}$$ de sacar una blanca,

que será la de que tendrá lugar la 4.ª tirada.

Si C saca una blanca, no quedarán en la urna mas de $m-3$, y las probabilidades de la 4.ª tirada serán $\frac{m-3}{m-3+n}$ de sacar una blanca, y $\frac{n}{m-3+n}$ de sacar una negra, y multiplicándolas

por la de que tendrá lugar la 4.ª tirada, se tendrá

$$\frac{m(m-1)(m-2)}{(m+n)(m-1+n)(m-2+n)} \times \frac{n}{m-3+n}$$ en favor del jugador D,

$$\frac{m(m-1)(m-2)}{(m+n)(m-1+n)(m-2+n)} \times \frac{m-3}{m-3+n}$$ contra D, ó de que tendrá lugar la 5.ª tirada.

Si el jugador D saca una blanca, volverá á sacar el jugador A, y como no habrán quedado mas de $m-4$ blancas, tendrá la probabilidad

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{(m+n)(m-1+n)(m-2+n)(m-3+n)} \times \frac{n}{m-4+n}$$ de ganar,

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{(m+n)(m-1+n)(m-2+n)(m-3+n)} \times \frac{m-4}{m-4+n}$$ de perder.

Continuando de este modo, y haciendo para mayor sencillez $m+n=r$, se formará la série

$$\frac{n}{r},\ \frac{mn}{r(r-1)},\ \frac{mn(m-1)}{r(r-1)(r-2)},\ \frac{mn(m-1)(m-2)}{r(r-1)(r-2)(r-3)},$$

$$\frac{mn(m-1)(m-2)(m-3)}{r(r-1)(r-2)(r-3)(r-4)},\ \frac{mn(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{r(r-1)(r-2)(r-3)(r-4)(r-5)},$$

$$\frac{mn(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)}{r(r-1)(r-2)(r-3)(r-4)(r-5)(r-6)}$$ etc.,

en la que el 1.°, 5.°, 9.° términos espresan las probabilidades

en favor del jugador *A*; el 2.° y 6.° en favor del jugador *B*; el 3.° y 7.° en favor de *C*; y el 4.° y 8.° en favor de *D*. El juego se acaba lo mas tarde cuando el número de fichas blancas ha salido, porque entonces ya no queda duda sobre quien debe ganar el juego. La probabilidad total para cada jugador se compone de la suma de las probabilidades que le corresponden en las tiradas que pueden tener lugar. En nuestro caso

$m=9$, $n=6$, $r=15$, y segun esto la probabilidad de que el jugador *A* ganará el juego será

$$\frac{6}{15}+\frac{9.6.8.7.6}{15.14.13.12.11}+\frac{9.6.8.7.6.5.4.3.2}{15.14.13.12.11.10.9.8.7}$$

$$=\frac{2}{3}+\frac{36}{715}+\frac{6}{5005}=\frac{11300}{25025};$$

$$\frac{9.6}{15.14}+\frac{9.6.8.7.6.5}{15.14.13.12.11.10}=\frac{9}{35}+\frac{18}{715}=\frac{7065}{25025}, \text{ para } B.$$

$$\frac{9.6.8}{15.14.13}+\frac{9.6.8.7.6.5.4}{15.14.13.12.11.10.9}=\frac{72}{455}+\frac{8}{715}=\frac{11024}{65073} \text{ para } C.$$

$$\frac{9.6.8.7}{15.14.13.12}+\frac{9.6.8.7.6.5.4.3}{15.14.13.12.11.10.9.8}=\frac{6}{65}+\frac{3}{715}=\frac{897}{9295} \text{ para } D.$$

La misma fórmula sirve para cuando los jugadores son en mayor ó menor número: si son dos, los términos que corresponden al primero son el 1.°, 3.°, 5.°, 7.° 9.°, etc., y al segundo el 2.°, 4.°, 6.°, 8.°, etc. Si los jugadores son tres, la probabilidad del 1.° será la suma del 1.°, 4.°, 7.°, 10.°, etc. términos; la del segundo la suma del 2.°, 5.°, 8.°, 11.°, etc. términos, y la del tercero la suma del 3.°, 6.°, 9.°, 12.°, etc. términos; y así de los demas casos.

CUESTION SEPTIMA.

Determinar las diversas probabilidades que hay de sacar de una urna cédulas de un color pedido, suponiendo que no se vuelven á meter las cédulas que se sacan.

44. Por lo dicho en la cuestion anterior nos será fácil sacar una fórmula general para la solucion de esta. Supongamos que en la urna haya m cédulas señaladas con la letra A y n con la letra B. Esto supuesto las probabilidades de la 1.ª tirada son

$$\text{Para sacar } A, \frac{m}{r}; \text{ para sacar } B, \frac{n}{r};$$

las de la 2.ª tirada son

$$\text{Para } AA, \frac{m(m-1)}{r(r-1)}; \text{ para } AB, \frac{mn}{r(r-1)};$$

$$BB, \frac{n(n-1)}{r(r-1)} \qquad BA, \frac{nm}{r(r-1)};$$

las de la tercera son

$$\text{Para } AAA, \frac{m(m-1)(m-2)}{r(r-1)(r-2)} \qquad AAB, \frac{m(m-1)n}{r(r-1)(r-2)}$$

$$ABA, \frac{mn(m-1)}{r(r-1)(r-2)} \qquad BAA, \frac{nm(m-1)}{r(r-1)(r-2)}$$

$$ABB, \frac{mn(n-1)}{r(r-1)(r-2)} \qquad BAB, \frac{nm(n-1)}{r(r-1)(r-2)}$$

$$BBA, \frac{n(n-1)m}{r(r-1)(r-2)} \qquad BBB, \frac{n(n-1)(n-2)}{r(r-1)(r-2)}$$

etc. etc.

Con esto basta para comprender la ley que sigue esta fórmula, y llevarla tan lejos como se quiera; pues no se necesita

mas que cuidar de quitar á cada tirada una cédula tanto del número total como del número de aquellas, que son del color de la que se supone que ha salido. Aquí, del mismo modo que en el n.° 25, se introducen los coeficientes en las sucesiones compuestas, cuando se prescinde del órden de los acontecimientos; asi que la probabilidad de sacar 2 acontecimientos A y 1 acontecimiento B sin distincion de órden, es

$$3\frac{m(m-1)n}{r(r-1)(r-2)},$$

y la de sacar en las mismas tres tiradas primero una A, luego otra A, y despues una B, es solamente

$$\frac{m(m-1)n}{r(r-1)(r-2)}.$$

Asimismo si se supone que hay en la urna tres clases de letras, por ejemplo m letras A, n letras B, s letras C, serán las probabilidades de la primera tirada, suponiendo $m+n+s=r$

para $A, \frac{m}{r}$; $B, \frac{n}{r}$; $C, \frac{s}{r}$;

las de la segunda son

para $AA \frac{m(m-1)}{r(r-1)}$; $AB, \frac{mn}{r(r-1)}$ $AC, \frac{ms}{r(r-1)}$;

$BC, \frac{ns}{r(r-1)}$; $BB, \frac{n(n-1)}{r(r-1)}$; $CC, \frac{s(s-1)}{r(r-1)}$;

$BA, \frac{nm}{r(r-1)}$; $CA \frac{sm}{r(r-1)}$, $CB, \frac{sn}{r(r-1)}$; etc.

Segun esto si se supone que hay en la urna 20 letras A y 35 letras B, y se pide la probabilidad de sacar una vez A y dos veces B sin distincion de órden; entonces $m=20$, $n=35$, $r=55$, y tendremos que calcular el término

$$3\frac{mn(n-1)}{r(r-1)(r-2)}=3\frac{20.35.34.}{55.54.53.}=\frac{2380}{5247};$$

y si se exigiese una sucesion determinada, por ejemplo BBA, la probabilidad de este acontecimiento seria

$$\frac{n(n-1)m}{r(r-1)(r-2)}=\frac{35.34.20}{55.54.53}=\frac{2380}{15741}.$$

Si, suponiendo que hay en la urna 20 letras A, 20 letras B, 25 letras C, 25 letras D, 50 letras E y 60 letras F, se pidiese la probabilidad de sacar 1 vez A, 1 vez B, 1 vez C, y 2 veces E en 5 tiradas sin distincion de órden, tendriamos que calcular el término

$$96\frac{mnps(s-1)}{r(r-1)(r-2)(r-3)(r-4)}=96\frac{20.20.25.50.49}{200.199.198.197.196}=\frac{10000}{117609}=0{,}08502;$$

y si se exigiese sacar las cinco veces seguidas la E, tendriamos la probabilidad

$$\frac{s(s-1)(s-2)(s-3)(s-4)}{r(r-1)(r-2)(r-3)(r-4)}=\frac{1081}{1293699}=0{,}000835.$$

CUESTION OCTAVA.

Determinar la probabilidad de sacar un punto dado con un número determinado de dados.

45. Las cuestiones de este género se resuelven facilisima-

mente por la fórmula de Moivre; cuya demostracion no se pone aqui por ser demasiado larga. La fórmula es la siguiente.

$$\frac{a(a-1)\ldots(a-n+2)}{1.\,2\ldots\ldots(n-1)}-\frac{a'(a'-1)\ldots(a'-n+2)}{1.\,2\ldots\ldots(n-1)}\times\frac{n}{1}$$
$$+\frac{a''(a''-1)\ldots(a''-n+2)}{1.\,2\ldots\,(n-1)}\times\frac{n(n-1)}{1.\,2}-\frac{a'''(a'''-1)\ldots(a'''-n+2)}{1.\,2\ldots\ldots(n-1)}$$
$$\times\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\,2.\,3}+\frac{a''''(a''''-1)\ldots(a''''-n+2)}{1.\,2\ldots\,(n-1)}\times\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\,2.\,3.\,4}$$
$-$ etc.

En esta fórmula se supone n el número de los dados; m el de los números con que cada uno está señalado principiando desde 1; $a+1$ el número que se desea sacar, $a'=a-m$; $a''=a'-m$; $a'''=a''-m$, etc.

Segun esto, si se nos pidiese la probabilidad de sacar el punto 8 con 3 dados de á seis caras, tendriamos

$$n=3,\ m=6,\ a=7,\ a'=1,$$

lo que dá, tomando solo el primer término de la fórmula, porque el que le sigue se reduce á cero, $\frac{7\cdot 6}{2}=21$, que es el número de maneras de sacar 8 con tres dados de á seis caras; y dividiéndolo por 6^3, que espresa el número total de lances (11), se tendrá la probabilidad pedida, que es $\frac{21}{216}=\frac{7}{72}$.

La probabilidad de sacar el punto 12 con 4 dados de á seis caras es, haciendo

$$n=4,\ m=6,\ a=11,\ a'=5,$$

$\frac{11\cdot 10\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3}-\frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}\times 4=125$ lances á favor, que divididos por 6, dará la probabilidad pedida, que es $\frac{125}{1296}$.

La probabilidad de sacar el mismo punto 12 con 6 dados de á seis caras, es $\frac{57}{5832}$, que es mucho menor que la anterior; lo cual debe suceder asi, por que aunque con 6 dados hay mu-

cho mayor número de lances que dan el punto 12, tambien hay mucho mayor número de lances que dan otros puntos, y la probabilidad pedida escluye todos los lances que no sean el punto 12.

Si se exigiese sacar á lo mas 20 puntos, y á lo menos 15 con los mismos 6 dados, entonces sumariamos las probabilidades de sacar los puntos 15, 16, 17, 18, 19 y 20, y obtendriamos en su suma la probabilidad que se busca, que es

$$\frac{1666}{46656}+\frac{2247}{46656}+\frac{2856}{46656}+\frac{3431}{46656}+\frac{3906}{46656}+\frac{4221}{46656}=\frac{18327}{46656}.$$

Ultimamente si se pidiese la probabilidad de no sacar menos de 46 ni mas de 48 puntos tirando una vez 8 dados de á 12 caras cada uno, entonces $n=8$, $m=12$, $a=45$, $=46$, $=47$; $a'=33$, $=34$, $=35$; $a''=21$, $=22$, $=23$; $a'''=9$, $=10$, $=11$; y buscando con estos números las probabilidades de sacar los puntos 46, 47 y 48, será su suma la probabilidad pedida; la cual es

$$\frac{14457060}{429981696}+\frac{15256264}{429981696}+\frac{15978215}{429981696}=\frac{45691539}{429981696}=0,1062.$$

CUESTION NOVENA.

Determinar las probabilidades en los juegos al rebatir.

46 Llamamos juegos *al rebatir*, aquellos que aunque se ganen no finalizan el juego, el cual continúa, hasta que uno de los jugadores ha ganado cierto número de juegos mas que su contrario; por manera que la conclusion del juego depende, no de ganar un número determinado de puntos, sino un número que sea mayor en una cantidad convenida al de los puntos ganados por el otro jugador.

Supongamos que dos jugadores se han convenido en que cuando uno de ellos haya ganado dos puntos mas que el otro, gane la apuesta; llamemos A y B á los jugadores así como los puntos que gana cada uno, y supongamos que la probabilidad de ganar un punto sea $\frac{1}{2}$. Es evidente que todas las disposiciones de letras en las que se halle una misma en los dos primeros lugares, deben escluirse cuando haya mas de dos lugares; pues designan un lance que no puede suceder sino despues de acabado el juego; la disposicion AA, por ejemplo, como hace ganar al jugador A. escluye la disposicion AAB. Tambien se conoce que una misma letra

no puede hallarse mas de tres veces seguidas despues del primer lugar; la disposicion *BAAAAB*, por ejemplo, no puede entrar en la de seis golpes, por que la disposicion *BAAA* termina el juego al cuarto golpe. Con estas observaciones facilmente hallaremos los diversos acontecimientos posibles, que son:

al primer golpe	al segundo	al tercero	al cuarto etc.
A	*AA*	*ABA*	*ABAA*
ó *B*	*AB*	*ABB*	*ABAB*
	BA	*BAA*	*ABBA*
	BB	*BAB*	*ABBB*
			BAAA
			BAAB
			BABA
			BABB

Buscando en esta tabla, que es fácil continuar, las disposiciones en que una letra se halle repetida dos veces mas que la otra, que son las que terminan el juego, se hallarán 2 en dos golpes, á saber *AA* y *BB*; 4 en cuatro golpes, que son *ABAA*, *ABBB*, *BAAA*, y *BABB*; y así de las demas. Y como la probabilidad de ganar un punto se ha supuesto $\frac{1}{2}$, la de ganar dos puntos seguidos será $\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ que será la probabilidad de cada uno de los acontecimientos del segundo golpe; la de cada uno de los de tres golpes sera $\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$; la de cada uno de los de cuatro golpes será $\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$, etc.; por consiguiente, una vez que hay dos lances que terminan el juego en dos golpes, habrá $2.\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$ de probabilidad de que el juego se acabará al segundo golpe; $4.\frac{1}{16}=\frac{1}{4}$ de probabilidad de que se acabará al cuarto golpe; y por lo mismo habrá $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ de probabilidad de que el juego no pasará del cuarto golpe; del mismo modo hallariamos $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$, de que el juego no pasará del sesto golpe, $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$ de que no pasará del octavo golpe, y asi de los demas. Es inútil advertir que el juego no puede terminar, segun las condiciones impuestas, sino en un número par de golpes.

Segun esto, y siendo la superioridad pedida de dos puntos so-

lamente, la fórmula que dá las probabilidades para dos golpes es

$$(e+f)^2=e^2+2ef+f^2;$$

en la que el término e^2 indica la probabilidad de que el jugador A, ganará los dos puntos seguidos, y por consiguiente que se acabará el juego en dos golpes; $2ef$, la probabilidad de que no se acabará el juego en dos golpes, porque uno de los jugadores gana un punto y otro su contrario; y f^2 la probabilidad de que ganará el juego el jugador B, y que se acabará el juego en dos golpes; de modo que e^2+f^2 indica la probabilidad de que se acabará el juego en dos golpes. Si consideramos mas tiradas será fácil sacar las probabilidades de la misma fórmula, multiplicándola por $e+f$ tantas veces como mas tiradas se consideren, lo que es conforme á los principios de las probabilidades compuestas (18); pero como los términos e^2 y f^2 terminan el juego, no se deben multiplicar por $e+f$ por que indicarán lances de tres letras que no se pueden verificar: así que solo se multiplicarán los términos que no deciden el juego. Haciéndolo con el $2ef$ por $e+f$ resultarán los

$$2fe^2+2ef^2$$

correspondientes á los acontecimientos

$$BAA, ABB$$

de los que ninguno decide el juego. Considerando cuatro golpes, y multiplicando por $e+f$ los dos últimos términos, tendremos

$$2e^3f+4e^2f^2+2ef^3;$$

en que el término de enmedio corresponde al caso en que no se acaba el juego: y como no puede acabarse este sino en un número par de golpes, será mas fácil tomar por multiplicador $e^2+2ef+f^2$, y continuando la operacion, vendremos á parar á esta progresion geométrica

$$2ef,\ 4e^2f^2,\ 8e^3f^3,\ 16e^4f^4 \text{ etc.}$$

para las probabilidades de que no se acabará el juego en estos

golpes; y suponiendo que las probabilidades simples sean $\frac{1}{2}$ para ganar cada punto, se tendrá

$$2\,\frac{1.1}{2.2}=\frac{1}{2};\ 4\,\frac{1.1}{4.4}=\frac{1}{4};\ 8\,\frac{1.1}{8.8}=\frac{1}{8};\ 16\,\frac{1.1}{16.16}=\frac{1}{16}\ \text{etc.}$$

para las probabilidades de que no se acabará el juego al 2.º, al 4.º, al 6.º, al 8.º etc. golpe; y restando de la unidad cada una de estas fracciones, resultarán las

$$\frac{1}{2};\ \frac{3}{4};\ \frac{7}{8},\ \frac{15}{16}\ \text{etc.}$$

que espresarán las probabilidades de que se acabará el juego en los mismos golpes.

Cuando el esceso de los puntos que hacen ganar es de mas de dos, entonces la regla que hay que seguir es la siguiente:

Para hallar la probabilidad de que el juego, en que el jugador A *debe ganar* p *puntos al jugador* B, *ó éste* q *puntos al jugador* A, *no se acabará en un número* r *de golpes, multiplíquese el binomio* e+f *por sí mismo tantas veces como unidades haya en* $r-1$, *teniendo cuidado despues de cada multiplicacion de borrar los términos en que el esponente de la letra* e *sea mayor en la cantidad* p *que el esponente de* f, *así como los términos en que el esponente de* f *sea mayor que el de* e *en la cantidad* q; *y los términos restantes darán la probabilidad pedida.* Los términos que se borran es porque corresponden á acontecimientos que terminan el juego.

Si se hubiese convenido, por egemplo, en que el jugador A debiese ganar 3 puntos mas que su contrario, y este 2 puntos mas que el jugador A para ganar el juego, y se pidiese la probabilidad de que se acabará el juego al 7.º golpe, entonces

$$p=3,\ q=2,\ r=7$$

y despues de seis multiplicaciones hallariamos

$$21e^4f^3+13e^3f^4;$$

y si se supone que $e=f=\frac{1}{2}$, equivaldrán dichos términos á

$$\frac{21+13}{128}=\frac{34}{128}=\frac{17}{64},$$

para la probabilidad de que no se acabará el juego en 7 golpes; y restando esta probabilidad de 1, se tendrá la de que se acabará el juego á los 7 golpes, la cual es $1-\frac{17}{64}=\frac{47}{64}$.

Si el esceso de los puntos del jugador A hubiese de ser 5 para ganar el juego, y el de los del jugador B hubiesen de ser 4 para lo mismo, y se pidiese la probabilidad de que se acabará el juego en 12 tiradas, entonces

$$p=5,\ q=4,\ r=12$$

y despues de 11 multiplicaciones se llegaria á

$$274e^7f^4+440e^6f^5+406e^5f^6;$$

y suponiendo que tambien fuese $\frac{1}{2}$ la probabilidad de ganar un punto, equivaldria esta espresion á

$$\frac{274+440+406}{2048}=\frac{1120}{2048}=\frac{35}{64}.$$

que es la probabilidad de que no se acabará el juego; la cual, restada de la unidad, dará la probabilidad pedida, que es $\frac{29}{64}$, la que siendo menor que $\frac{1}{2}$ manifiesta que no es probable que se acabe el juego en 12 tiradas.

Se ve por lo que precede, que cuando el esceso de los puntos es algo considerable, se necesita mucho número de tiradas para que haya probabilidad de que se acabe el juego, ó de que lo gane uno de los jugadores. Esto manifiesta que la clase de juegos en que se atraviesa dinero, menos perjudicial á las costumbres, es la que llamamos *de los juegos al rebatir*; sobre todo cuando se fija un esceso algo grande; pues por mucho tiempo que empleen en ellos los jugadores, no se puede atravesar un número considerable de juegos; así como son los mas perjudiciales cuando no se atraviesa dinero, porque consumen el tiempo, que es de un

valor inestimable. No considerando, por egemplo, mas de 4 puntos de esceso, se necesitarian 12 tiradas para llegar á una probabilidad mayor que $\frac{1}{2}$ de que se acabará el juego con este número de golpes, como se manifiesta en las diversas multiplicaciones de $e+f$ que siguen:

$$e+f$$

$$e^2+2ef+f^2;$$

$$e^3+3e^2f+3ef^2+f^3;$$

$$4e^3f+6e^2f^2+4ef^3;$$

$$4c^4f+10e^3f^2+10e^2f^3+4ef^4;$$

$$14c^4f^2+20e^3f^3+14e^2f^4;$$

$$14e^5f^2+34e^4f^3+34e^3f^4+14e^2f^5;$$

$$48e^5f^3+68e^4f^4+48e^3f^5;$$

$$48e^6f^3+116e^5f^4+116e^4f^5+48e^3f^6;$$

$$164e^6f^4+232e^5f^5+164e^4f^6;$$

$$164e^7f^4+396e^6f^5+396e^5f^6+164e^4f^7;$$

$$164e^8f^4+560e^7f^5+792e^6f^6+560e^5f^7+164e^4f^8;$$

y suponiendo siempre $e=f=\frac{1}{2}$, y calculando cada una de estas espresiones, se halla que sus valores son: 1, 1, 1, $\frac{7}{8}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{41}{64}$, $\frac{41}{64}$, $\frac{35}{64}$, $\frac{35}{64}$, y $\frac{259}{512}$; que espresan las probabilidades de que no se acabará el juego en 1, 2, 3,..... 12 golpes; y como solo la última de estas fracciones es menor que $\frac{1}{2}$, inferiremos que la probabilidad contraria, ó la de que se acabará el juego, no es mayor que $\frac{1}{2}$ sino se abrazan 12 tiradas.

Hay mucho que reparar en las espresiones anteriores. En primer lugar la 1.ª, 2.ª y 3. es cada una igual á 1, lo que

manifiesta que ciertamente no se acabará el juego en una ni en dos, ni en tres tiradas (8); lo cual es evidente por las mismas condiciones del juego, pues solamente se puede acabar cuando un jugador haya ganado 4 puntos mas que su contrario, para lo que se necesitan jugar lo menos *cuatro tiradas.* En segundo lugar la 4.ª y 5.ª, la 6.ª y 7.ª, la 8.ª y 9.ª, la 10.ª y 11.ª son iguales entre sí; y esto es muy sencillo, porque aunque los lances que no acaban el juego son en doble número en un número ímpar de tiradas que en el número par anterior, como puede verse, continuando la tabla de las combinaciones de las letras *A* y *B*, tambien es cierto que abrazando un golpe mas hay que multiplicar la fraccion anterior por $\frac{1}{2}$ para obtener la probabilidad compuesta del golpe siguiente, y por consiguiente lo que por una parte se aumenta, por otra se disminuye.

Cuando la probabilidad de ganar un punto es menor que $\frac{1}{2}$, se viene á parar tambien á una progresion geométrica, cuando el esceso que hace ganar es de dos puntos solamente. Pero en este caso no se pueden calcular las probabilidades de que se acabará el juego por medio de sus contrarias, sino que hay que calcularlas directamente. La regla que hay que seguir para esto es la misma que la anterior, sin mas diferencia que el poner aparte el valor de los términos que se van borrando, pues su suma dá las probabilidades de que se acabará el juego en 2, 4, 6 etc. tiradas. Siendo $\frac{1}{3}$, por egemplo, la probabilidad de ganar un punto, hallariamos

$$e^2+f^2=\frac{2}{9}$$

para la probabilidad de que se acabará el juego en dos tiradas;

$$2e^3f+2ef^3=\frac{4}{81};\ \frac{4}{81}+\frac{2}{9}=\frac{22}{81}$$

para la de que se acabará en cuatro tiradas;

$$4e^4f^2+4e^2f^4=\frac{8}{729};\ \frac{8}{729}+\frac{22}{81}=\frac{206}{729}$$

para la de que se acabará en seis tiradas; y así de las demas. Donde se advierte, que cuando la probabilidad de ganar un punto es menor que $\frac{1}{2}$ se necesita un gran número de tiradas para llegar á una probabilidad mayor que $\frac{1}{2}$ de que se acabará el juego, aun cuando la conclusion de este dependa únicamente del esceso de 2 puntos.

DETERMINACION

DE LAS

Probabilidades de la Lotería.

CUESTION DECIMA.

¿Qué probabilidad tiene de acertar el que ha señalado uno ó mas de los 90 números de la Lotería?

47. Este juego se hace por lo comun á cuenta de los gobiernos, y consiste en meter en una caja 90 números desde el 1 hasta el 90, y estraer 5 de ellos. Con anticipacion han señalado los jugadores en las respectivas administraciones los números que quieren jugar, pagando al respecto de la clase de su jugada; y despues de publicada la estraccion acuden á cobrar sus ganancias los que han tenido acierto á las administraciones donde jugaron. Es muy diverso el modo de hacer las jugadas: unos señalan uno ó mas números, y los juegan á estracto simple ó á estracto determinado; y si sale alguno ó algunos de los que jugaron, reciben un premio igual á 10 veces lo que jugaron á cada estracto simple de los que aciertan, ó á 50 veces lo que jugaron á cada estracto determinado de los que aciertan. Otros señalan 2 ó mas números, y los juegan al *ambo*; y si aciertan 2 números ganan un ambo, si aciertan tres números ganan 3 ambos, si 4, ganan 6 ambos, y si aciertan los 5 ganan 10 ambos: por cada ambo que ganan reciben un premio igual á 238 veces lo que jugaron á cada ambo de los que aciertan. Otros últimamente señalan 3 ó mas números, y los juegan al *terno*, y si aciertan 3 números ganan un terno, si 4, ganan 4 ternos, y si los 5, ganan 10 ternos; y por cada terno que aciertan reciben un premio igual á 4250 veces lo que ju-

garon á cada terno de los que aciertan. Cada uno paga tantos ambos ó ternos como combinaciones diferentes de á *dos* ó de á *tres* números es posible hacer con los números que juegan. Si, por egemplo, se juegan 5 números al ambo, se pagarán $\frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2}=10$ ambos; si se juegan los 5 números al terno, se pagan $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3}=10$ ternos; y si se juegan al ambo y terno, se pagan 10 ambos y 10 ternos. Si se juegan 10 números al ambo, se pagan $\frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2}=45$ ambos; si se juegan al terno, se pagan $\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3}=120$ ternos; y si se juegan al ambo y terno, se pagan 45 ambos y 120 ternos. Despues de esto tratemos de resolver la cuestion propuesta.

Puesto que en cada estraccion se sacan 5 números de los 90, es evidente que cada número tiene $\frac{5}{90}=\frac{1}{18}$ de probabilidad para salir; así que el que ha señalado un número tiene $\frac{1}{18}$ de probabilidad para acertarlo, y $\frac{17}{18}$ para no acertarlo. De aquí no debe inferirse que el que ha señalado 2 ó 3 números tiene $\frac{2}{18}$ ó $\frac{3}{18}$ de probabilidad para acertar uno; porque entonces el que señalase 18 números tendria $\frac{18}{18}$ de probabilidad de acertar uno, y como esta fraccion es igual á la unidad, se seguiria que el que juega 18 números tiene certeza de acertar uno; lo cual es un absurdo.

Para sacar las probabilidades de acertar un número señalândo dos ó mas de ellos, consideraremos que una estraccion es una combinacion de 5 números cualesquiera de los 90, y como estos componen $\frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}=43949268$ combinaciones de á 5 números ó cinquinas, tendrá á su favor el jugador todas aquellas cinquinas que contengan uno ó mas números de los que señaló. Si, por egemplo, se juegan dos números, y se quiere saber la probabilidad de acertar uno, habrá á favor todas aquellas cinquinas que contengan uno de los números designados. La cuestion está pues reducida á buscar este número. Esto es súmamente fácil, pues no hay mas que calcular las cuaternas que componen los 88 números restantes, y juntar alternativamente á cada una de ellas cada uno de los dos números señalados; así que se tendrán á favor $\frac{88 \cdot 87 \cdot 86 \cdot 85}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \times 2=4665780$ cinquinas; y dividiendo ahora este número por el número total de cinquinas, se tendrá $\frac{4665780}{43949268}=0,1061$ de probabilidad de acertar nada mas de un número señalando dos. Si se quisiese saber la probabilidad de acertar á lo menos uno de los dos, en-

tonces no solo habria á favor todas las cinquinas que contuviesen uno de los números señalados, sino tambien todas aquellas que contuviesen los dos: estas últimas se forman averiguando los ternos de los 88 números restantes, para juntar á la vez á cada uno de ellos los dos números designados; y se tendrán otros $\frac{88 \cdot 87 \cdot 86}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 109736$ lances favorables, que agregados á los 4663780 anteriores, componen 4773516 lances favorables, que divididos por el número total de lances, se tendrá

$$\frac{4773516}{43949268} = 0,1086$$

que es la probabilidad de acertar á lo menos un número, designando dos.

48. Para resolver el problema que nos ocupa con toda generalidad, consideraremos una lotería compuesta de n números, y que en cada estraccion se sacan m; segun lo que, la probabilidad de que designando t números, se acertarán s, se hallará formando la espresion del número de combinaciones de los $n-t$ números restantes tomados en número $m-s$, que será

$$\frac{(n-t)(n-t-1)(n-t-2)\ldots\ldots\left\{n-t-(m-s)+1\right\}}{1.2.3\ldots\ldots\ldots\ldots(m-s)};$$

considerando despues que los t números designados pueden combinarse de

$$\frac{t(t-1)(t-2)\ldots\ldots(t-s+1)}{1.2.3\ldots\ldots s} \text{ maneras,}$$

se multiplicará esta última espresion por la anterior para obtener el número de lances favorables. El número total de lances se sacará formando las combinaciones que componen los n números de la lotería tomados en número q, que son

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1.2\ldots\ldots m};$$

y dividiendo por último el número de lances favorables por el número total de lances, se tendrá la probabilidad pedida, la cual es

$$\frac{(n-t)(n-t-1)\ldots\ldots\left\{n-t-(m-s)+1\right\}}{1.2.3\ldots\ldots\ldots\ldots(m-s)}\times$$

$$\frac{t(t-1)(t-2)\ldots\ldots(t-s+1)}{1.2.3\ldots\ldots s}\times\frac{1.2.3\ldots\ldots\ldots m}{n(n-1)\ldots\ldots(n-m+1)};$$

fórmula que se simplifica, suprimiendo los factores comunes al numerador y denominador.

Cuando la probabilidad pedida no es la de la salida de un número preciso de números designados, sino la de que no se acertarán menos de un número determinado r, por egemplo, entonces se pondrán en lugar de s los números

$r, r+1, r+2\ldots\ldots\ldots$ hasta m, si $t > m$, ó hasta t si $t < m$.

Con estos antecedentes fácilmente resolveremos todos los problemas de este género que se puedan proponer.

Supongamos en primer lugar que se han señalado 20 de los 90 números, y hallaremos por las fórmulas anteriores, las probabilidades siguientes:

Para no acertar ninguno de los 20 números,

$$\frac{70.69.68.67.66}{1.2.3.4.5}\times\frac{1.2.3.4.5}{90.89.88.87.86}=0,2753;$$

Para acertar un número nada mas,

$$\frac{70.69.68.67}{1.2.3.4}\times\frac{20}{1}\times\frac{1.2.3.4.5}{90.89.88.87.86}=0,4173;$$

Para acertar 2 números nada mas,

$$\frac{70.69.68}{1.2.3} \times \frac{20.19}{1.2} \times \frac{1.2.3.4.5}{90.89.88.87.86} = 0,2367;$$

Para acertar nada mas de 3 números,

$$\frac{70.69}{1.2} \times \frac{20.19.18}{1.2.3} \times \frac{1.2.3.4.5}{90.89.88.87.86} = 0,0626;$$

Para acertar nada mas que 4 números,

$$\frac{70}{1} \times \frac{20.19.18.17}{1.2.3.4} \times \frac{1.2.3.4.5}{90.89.88.87.86} = 0,0077;$$

Para acertar los 5 números,

$$\frac{20.19.18.17.16}{1.2.3.4.5} \times \frac{1.2.3.4.5}{90.89.88.87.86} = 0,0004.$$

La suma de las cinco últimas probabilidades, ó lo que es lo mismo, el esceso de la unidad sobre la primera, que es 0,7247, será la probabilidad de que se acertará al menos 1 de los 20 números; la que siendo mucho mayor que $\frac{1}{2}$, da á conocer que es bien probable que se acertará uno de los 20 números. La probabilidad de que se acertarán lo menos 2 números de los 20, es la suma de las cuatro últimas, que es 0,3074; la de que se acertarán lo menos 3, es 0,0707 suma de las tres últimas; y la de que se acertarán lo menos 4, es 0,0081, suma de las dos últimas.

Si se pidiese la probabilidad de acertar un estracto, un ambo, un terno, una cuaterna, ó una cinquina, señalando cinco de los noventa números de la Lotería, sacariamos del mismo modo que anteriormente las probabilidades espresadas por las

fracciones siguientes.

$$\frac{85.84.83.82.81}{1.2.3.4.5} \times \frac{1.2.3.4.5}{90.89.88.87.86} = 0,746349,$$ de no acertar ninguno.

$$\frac{85.84.83.82}{1.2.3.4} \times \frac{5}{1} \times \frac{1.2.3.4.5}{90.89.88.87.86} = 0,230355,$$ de acertar nada mas de 1.

$$\frac{85.84.83}{1.2.3} \times \frac{5.4}{1.2} \times \frac{1.2.3.4.5}{90.89.88.87.86} = 0,022474,$$ de acertar nada mas de 2.

$$\frac{85.84}{1.2} \times \frac{5.4.3}{1.2.3} \times \frac{1.2.3.4.5}{90.89.88.87.86} = 0,000812,$$ de acertar nada mas de 3.

$$\frac{85}{1} \times \frac{5.4.3.2}{1.2.3.4} \times \frac{1.2.3.4.5}{90.89.88.87.86} = 0,000009,$$ de acertar nada mas de 4.

$$\frac{5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5} \times \frac{1.2.3.4.5}{90.89.88.87.86} = 0,00000023,$$ de acertar los 5:

las sumas de las cinco últimas, de las cuatro últimas, de las tres últimas, y de las dos últimas, que son 0,253650; 0,023295; 0,000821 y 0,000009, dan las probabilidades de acertar á lo menos 1, á lo menos 2, á lo menos 3, y á lo menos 4 de los 5 números.

Si se quisiese saber cuantos números es necesario jugar para tener una probabilidad superior á $\frac{1}{2}$ de acertar dos números, probariamos con 21, con 22, con 23 etc. números, y hallariamos que hasta los 29 no hay probabilidad de acertar á lo menos 2 números ó un ambo; y que la probabilidad de acertar á lo menos un ambo jugando 28 números, es 0,4974, que es muy cercana á $\frac{1}{2}$; y jugando 29, es $0,5202 > \frac{1}{2}$; de lo que

se infiere que es probable acertar lo menos un ambo con 29 números.

49. Pudiéndose comparar las estracciones de la lotería con las tiradas de dados, se puede aplicar á ellas el desarrollo de las potencias del binomio. Por egemplo, sabiendo que si se juegan 8 números se tiene una probabilidad igual á 0,06078 de acertar á lo menos un ambo, habrá 0,93922 de probabilidad para no acertarlo, que es lo que le falta á la primera probabilidad para llegar á ser igual á la unidad; y será por consiguiente $e=0,06078$, $f=0,93922$, y se tendrá

$$e^2+2ef+f^2;$$

cuyo primer término $e^2=0,00369$ indica la probabilidad de acertar á lo menos un ambo en cada una de dos estracciones seguidas jugando 8 números; $2ef=0,11417$ la de acertarlo en una estraccion y en otra no, y $f^2=0,88214$ la de no acertarlo en ninguna de las dos.

En general el desarrollo de

$$(e+f)^x=e^x+\frac{x}{1}e^{x-1}f \ldots\ldots + \frac{x(x-1)\ldots\ldots(x-n+1)}{1.2.\ldots\ldots n}e^{x-n}f^n$$

indica las probabilidades de los diversos acontecimientos que pueden suceder jugando un número x de estracciones un número determinado de números.

50. Con las fórmulas últimas y la del n.° 28 podemos resolver los problemas que se nos propongan relativos á averiguar el número de estracciones que debe jugarse una jugada cualquiera para adquirir una probabilidad dada de acertar uno ó mas números. Si se nos preguntase, por egemplo, *cuantas estracciones se necesita jugar* 10 *números para tener una probabilidad igual á* $\frac{1}{2}$ *de acertar á lo menos un ambo*? averiguariamos primero la probabilidad de acertar á lo menos un ambo con 10 números, la cual es 0,09314; despues de esto haremos $e=0,09314$; $f=0,90686$, y desarrollaremos el binomio $(e+f)^x$, debiendo ser x tal, que la suma de los términos desde el primero hasta el que está afectado de $\frac{x}{1}ef^{x-1}$ sea igual á $\frac{1}{2}$,

y vendremos á parar á la fórmula del n.° 28; tendremos pues

$$x = \frac{l.2}{l.100000 - l.90686} = 7,09;$$

lo que manifiesta que abrazando mas de 7 estracciones, ó jugando 10 números 8 estracciones, hay una probabilidad superior á $\frac{1}{2}$ de acertar en una de ellas á lo menos un ambo.

Las estracciones necesarias para adquirir una probabilidad igual á $\frac{3}{5}$ de acertar á lo menos un ambo jugando 15 números, se sacan averiguando la probabilidad que hay de acertar con 15 números un ambo á lo menos, la cual es 0,19244; despues de lo que sacaremos

$$x = \frac{l.5 - l.2}{l.2500 - l.2019} = 4,3;$$

porque $0,19244 = \frac{481}{2500}$, y la probabilidad contraria es

$$1 - \frac{481}{2500} = \frac{2019}{2500}.$$

Ultimamente las estracciones necesarias para tener $\frac{1}{2}$ de probabilidad de acertar á lo menos un ambo ó á lo menos un terno, jugando 5 números, son

$$x = \frac{l.2}{l.10000 - l9767} = 29,39$$

estracciones para acertar á lo menos un ambo; y

$$x = \frac{l.2}{l.1000000 - l.999179} = 836,194$$

estracciones necesarias para tener tanta probabilidad de acertar á lo menos un terno como de no acertarlo jugando 5 números.

51. Propongámonos ahora *hallar la probabilidad de que todos los números de la lotería hayan salido despues de un número determinado de estracciones.*

Este problema ha sido resuelto por *Euler y Mr. Laplace* por distintos caminos. Aquí pondremos la fórmula del primero, suprimiendo su demostracion, que es bastante complicada: la fórmula es la siguiente:

$$\frac{P^n_m}{P^n_m}-\frac{m}{1}\,\frac{P^n_{m-1}}{P^n_m}+\frac{m(m-1)}{1.2}\,\frac{P^n_{m-2}}{P^n_m}$$

$$-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\,\frac{P^n_{m-3}}{P^n_m}\ldots\ldots\pm\frac{m(m-1)\ldots(m-x+1)}{1.2\ldots\ldots x}\,\frac{P^n_{m-x}}{P^n_m}$$

en ella se supone que

$$P_m=\frac{m(m-1)\ldots.(m-i+1)}{1.2\ldots\ldots i}$$

$$P_{m-1}=\frac{(m-1)(m-2)\ldots..(m-1-i+1)}{1.2\ldots\ldots\ldots i}\text{ etc.}$$

$m=$ á los números de que se compone la lotería,
$i=$ á los que salen cada estraccion,
$n=$ al número de estracciones que se consideran.

Despues de esto, para que sea fácil calcular por logaritmos los términos de la fórmula cuando m y n son algo considerables, consideraremos los valores de

$$P^n_{m-1},\ P^n_{m-2}\text{ etc.}$$

y haciendo

$$\frac{m}{1}P^n_{m-1}=A,\ \frac{m(m-1)}{1.2}P^n_{m-2}=B,\quad\text{etc., se tendrá}$$

$$\frac{A}{P^{n}_{m}}=\frac{m}{1}\,\frac{P^{n}_{m\cdot\cdot1}}{P^{n}_{m}},\ \frac{B}{A}=\frac{m-1}{2}\,\frac{P^{n}_{m\cdot\cdot2}}{P^{n}_{m\cdot\cdot1}},$$

$$\frac{C}{B}=\frac{m-2}{3}\,\frac{P^{n\,n}_{m\cdot\cdot3}}{P^{n}_{m\cdot\cdot2}},\ \frac{D}{C}=\frac{m-3}{4}\frac{P^{n}_{m\cdot\cdot4}}{P^{n}_{m\cdot\cdot3}}\ \text{etc.};$$

y subiendo ahora á los valores de

$$P^{n}_{m}\ ,\ P^{n}_{m\cdot\cdot1}\ ,\ P^{n}_{m\cdot\cdot2}\ \text{etc.}\ ;$$

se tendrá

$$\frac{P^{n}_{m\cdot\cdot1}}{P^{n}_{m}}=\left\{\frac{(m-1)\ldots\ldots(m-i)}{m(m-1)\ldots(m-i+1)}\right\}^{n}=\left(\frac{m-i}{m}\right)^{n}$$

$$\frac{P^{n}_{m\cdot\cdot2}}{P^{n}_{m\cdot\cdot1}}=\left\{\frac{(m-2)\ldots(m-i-1)}{(m-1)\ldots\ldots(m-i)}\right\}^{n}=\left(\frac{m-i-1}{m-1}\right)^{n}$$

$$\frac{P^{n}_{m\cdot\cdot3}}{P^{n}_{m\cdot\cdot2}}=\left\{\frac{(m-3)\ldots(m-i-2)}{(m-2)\ldots(m-i-1)}\right\}^{n}=\left(\frac{m-i-2}{m-2}\right)^{n}\text{etc};$$

de donde se infiere que

$$\frac{A}{P^{n}_{m}}=\frac{m}{1}\left(\frac{m-i}{m}\right)^{n},\ \frac{B}{A}=\frac{m-1}{2}\left(\frac{m-i-1}{m-1}\right)^{n},$$

$$\frac{C}{B}=\frac{m-2}{3}\left(\frac{m-i-2}{m-2}\right)^{n},\ \frac{D}{C}=\frac{m-3}{4}\left(\frac{m-i-3}{m-3}\right)\ \text{etc.}$$

pasando ahora á los logaritmos, se tendrá

$$l\frac{A}{P^n_m}=lm-nl\frac{m}{m-i};\ l\frac{B}{A}=l\frac{m-1}{2}-nl\frac{m-1}{m-i-1};$$

$$l\frac{C}{D}=l\frac{m-2}{3}-nl\frac{m-2}{m-i-2};\ l\frac{D}{C}=l\frac{m-3}{4}-nl\frac{m-3}{m-i-3}\text{etc.}$$

y observando por último que

$$l\frac{B}{P^n_m}=l\frac{A}{P^n_m}+l\frac{B}{A};\ l\frac{C}{P^n_m}=l\frac{B}{P^n_m}+l\frac{C}{B};$$

$$l\frac{D}{P^n_m}=l\frac{C}{P^n_m}+l\frac{D}{C}\text{ etc},$$

se determinará por medio de una série, tanto mas convergente cuanto mayor sea el número n la razon de cada término de la fórmula propuesta comparado con el primero; y será fácil determinar la probabilidad que se busca por medio de dicha fórmula, la que con las observaciones últimas queda reducida á

$$1-\frac{A}{P^n_m}+\frac{B}{P^n_m}-\frac{C}{P^n_m}+\text{etc.}$$

Para obtener la probabilidad pedida se deben calcular tantos términos de la fórmula como unidades haya en $i+1$.

Si suponemos $m=90$, $i=5$, que son las condiciones de la lotería primitiva, hallaremos calculando los seis primeros términos para la probabilidad de que hayan salido todos los números en 100 estracciones 0,7410 Considerando solo 85 estracciones, hallariamos 0,4887. En 150 estracciones la probabilidad de que hayan salido todos los números es 0,9831, y últimamente en 200 estracciones la misma probabilidad es 0,99902.

De la esperanza matemática y de la valuacion de las apuestas

52. Entiéndese por esperanza matemática *el producto de una suma eventual por la probabilidad de obtenerla.* Si, por egemplo, hay un fondo de una importancia x destinado para aquel de dos jugadores que gane el juego, y suponemos que uno tiene $\frac{1}{3}$ de probabilidad para ganarlo y el otro $\frac{2}{3}$, la esperanza matemática del primero sobre dicho fondo será $\frac{1}{3}\times x=\frac{x}{3}$, y la del segundo $\frac{2}{3}\times x=\frac{2x}{3}$: por manera que tratando de enagenar su esperanza uno de los jugadores, lo que equitativamente puede pedir por la suya el primero es $\frac{x}{3}$, y el segundo $\frac{2x}{3}$.

53. Segun esto es muy fácil determinar la parte que cada uno deberá poner en el fondo antes de principiarse el juego; pues es claro que la parte de cada uno debe ser proporcional á la esperanza que tiene de ganar. De aquí se infiere que *la suma que cada uno de los jugadores debe poner en el fondo del juego ha de ser proporcional al número de lances que tiene en su favor*; de suerte que llamando e la probabilidad de un jugador, f la de otro, y a b las sumas que ponen en el fondo, para que el partido sea equitativo, debe verificarse la proporcion

$$a:b::e:f, \text{ de donde } af=be.$$

Si, por egemplo, apuesta un jugador sacar un punto determinado tirando con un dado de seis caras, lo que debe poner en el fondo es 1, y su contrario 5, porque el primero no tiene mas de un lance en su favor, mientras éste tiene cinco; y de este modo se verifica la proporcion $\frac{1}{6}:\frac{5}{6}::1:5$. Esto es muy sencillo, pero para comprenderlo con mas claridad, supongamos que seis jugadores se han repartido los seis lances que pueden suceder, cuando se tira un dado de seis caras, tomando cada uno el suyo; en este caso todos deberán poner igual cantidad en el fondo, porque no hay razon ninguna para que uno ponga mas y otro menos. En este estado, si otro jugador quisiese sustituirse á cinco de los que han apostado, ó quisiese comprarles su esperanza, deberia dar á cada uno su dinero; y por consiguiente este jugador pondria 5 tantos mas que su contrario. Del mismo modo discurriremos con respecto á otros

egemplos mas complicados. Si, por egemplo, se quiere saber lo que debe poner en el fondo el que apuesta sacar á lo menos dos veces el punto 4 tirando cinco veces el mismo dado, sabiendo por el número 27 que la probabilidad de este lance es $\frac{1526}{7767}$, inferiríamos que debia poner 1526 y su contrario 6250.

54. Cuando la decision del juego depende de pruebas repetidas, y han tenido lugar ya algunas de ellas, varía la esperanza matemática y puede adquirir mas ó menos importancia. Supongamos que apuesta uno sacar 2 veces seguidas el punto 6 tirando dos veces un dado de 6 caras, y que por consiguiente ha puesto 1 en el fondo y su contrario 35; despues de esto se tira una vez el dado y sale un 6, y antes de tirarse la segunda vez se convienen en separarse, ¿qué cantidad debe tomar cada uno? Es claro que el primero debe llevarse 6 y su contrario 30, porque habiendo salido ya una vez el 6, la decision de la suerte depende de que salga ó no el 6 en la tirada que queda; y como la probabilidad de que salga el 6 en esta tirada es $\frac{1}{6}$, y la de que no salga $\frac{5}{6}$, se llevará el primero la sesta parte del fondo y el segundo las cinco sestas partes.

Del mismo modo, si suponemos que hay un fondo destinado para aquel de dos jugadores que gane antes tres juegos, y que, habiendo ganado uno de ellos dos juegos y el otro uno, quiere separarse, nos será fácil determinar por medio de las probabilidades compuestas la parte que cada uno se debe llevar. Para esto consideraremos que si se hubiese jugado un juego mas, y lo hubiese ganado el primero, se llevaria todo el fondo: la probabilidad de este acontecimiento es $\frac{1}{2}$. Si el juego lo gana el segundo jugador, cada uno de ellos habria ganado dos juegos, y el siguiente decidiria la suerte; pero como la probabilidad de que llegue á jugarse este juego es $\frac{1}{2}$, tendrá cada jugador $\frac{1}{4}$ de probabilidad de ganarlo: ahora bien, esta última probabilidad es la única esperanza que le queda al segundo jugador, mientras que el primero tiene ademas $\frac{1}{2}$ desde el juego precedente; serán pues las probabilidades ó las esperanzas que quedan á cada uno

para el primer jugador $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$, y para el 2.° $\frac{1}{4}$;

y por consiguiente si el fondo del juego fuese 36 piezas, el primero se llevaria $36\times\frac{3}{4}=27$, y el segundo $36\times\frac{1}{4}=9$.

Hemos considerado aquí la separacion de los jugadores antes

de la decision de su suerte como efecto de convencion, pero en muchos casos puede ser necesaria; y esto sucede cuando no se puede determinar el fin del juego, el que puede ser interminable en los juegos al *rebatir*. Supongamos, contrayéndonos al egemplo del n.° 46, cuestion 9.ª, que el jugador A gana un punto al primer golpe, y que entonces propone la separacion. Segun la tabla del número citado si sale A á la primera tirada, ya no quedan para la segunda sino los acontecimientos A ó B, de los que cada uno tiene $\frac{1}{2}$ de probabilidad; si sale el primero gana el jugador A, y si sale el segundo quedan reducidos á la igualdad los dos jugadores; ó quedan, como al principio del juego, con la probabilidad $\frac{1}{2}$ de ganar; luego el primer jugador tiene, despues de ganado un punto, $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$ de probabilidad de ganar, y el segundo $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ solamente; y por consiguiente si se separan, se llevará el primero los $\frac{3}{4}$ del fondo, y el segundo $\frac{1}{4}$.

CONCLUSION.

Por todo lo que precede se ha podido notar la exactitud de que es susceptible el Cálculo de las Probabilidades, y hasta qué punto puede fundar los motivos de nuestra opinion sobre los acontecimientos inciertos. Es verdad que por medio de este ramo de las Matemáticas no se fija de un modo preciso lo que infaliblemente debe suceder; pero se determina con toda la exactitud de un cálculo rigorosamente verdadero el grado de confianza con que debemos esperar el acontecimiento que sea el objeto de nuestro interes; y esto es ya sin duda muy importante. Aunque sea cierto que con solo el auxilio de la razon podemos llegar á descubrir la mayor ó menor probabilidad de un acontecimiento, nos es imposible sin embargo determinar el grado de confianza con que debemos esperarlo, sin valernos para esto del cálculo; y aun nos puede suceder que, llevados de las apariencias, tengamos por muy probables algunos hechos, que, sujetándolos á un cálculo matemático, resulten ser improbables, ó que sea menor que $\frac{1}{2}$ la fraccion que esprese su probabilidad.

Solo las leyes de las combinaciones y algunos principios de álgebra, nos han conducido al descubrimiento de las verdades importantes que contiene esta primera seccion del Cál-

culo de las Probabilidádes. Pero estas mismas leyes y la aplicacion de las partes mas elevadas del álgebra, conducen á resultados mucho mas interesantes en la determinacion de las *probabilidades á posteriori.* La consideracion de las pruebas repetidas, y la determinacion de las probabilidades compuestas de los acontecimientos que de ellas resultan con arreglo á sus probabilidades simples, hizo concebir la idea de hacer servir de una manera incontestable la observacion de los acontecimientos pasados á la determinacion de los futuros, y llegar á conocer la probabilidad de los hechos únicamente por medio de las observaciones, por que es demostrado, que en una larga série de pruebas, la distribucion de los acontecimientos simples tiende continuamente á aproximarse á la razon de su probabilidad. Esta ley que se prueba por el cálculo, y que acredita la esperiencia, es muy luminosa, y dió motivo á Jacobo Bernoulli para llevar el Cálculo de las Probabilidades mas lejos de lo que tal vez podian imaginar los primeros que se ocuparon de él, con el único objeto de resolver cuestiones relativas á los juegos de suerte. Bernoulli comparó los acontecimientos, cuya causa no se conoce, á las extracciones repetidas de una urna que contuviese un número ignorado de billetes blancos y negros, pero que permaneciese siempre el mismo número, volviendo á meter en la urna á cada tirada el billete que se hubiese sacado: esta suposicion es legítima, pues pudiéndose mirar como infinito el número de los acontecimientos naturales, no debe considerarse que se disminuye sensiblemente, porque se verifiquen los que observamos. Esto le dió motivo á proponerse el siguiente problema que tuvo sin resolver en su libro de memoria por espacio de veinte años, á saber: *Buscar si, aumentando sin cesar él número de observaciones, se hacía crecer la probabilidad de tener la verdadera razon entre el número de lances que producen un acontecimiento y los lances contrarios, de tal modo que dicha probabilidad llegase á ser mayor que un grado determinado de certeza.* La solucion de este problema, y la de otros que se le siguieron, abrió un estenso campo donde se egercitaron sublimes talentos é ilustres geómetras, aplicando con tanto fruto el Cálculo de las Probabilidades á las ciencias físicas, morales y políticas.

INDICE

de lo contenido en este opúsculo.

ERRATAS.

Página.	Línea.	Dice.	Léase.
11	3	de el los	de ellos
32	7	5^4	5^5
35	pen.	$(m+m)^8$	$(m+m)^6$
35	ult.	$(m+m)$	$(m+m)^8$
38	6	$m,$	$m^x,$
39	16	$5.3.^4 2^8$	$5.3.^4 2$
39	ult.	n	n^5
40	6	$+1365m^{11}n$	$+1365m^{11}n^4$
40	7	$+5005m^6n$	$+5005m^6n^9$
40	11	$210.3^6 2$	$210.3.^6 2^4$
40	22	menos	menor
47	2	á que se	que se
52	pen.	$+35e^3f$	$+35e^3f^4$
53	2	$+126e^5f$	$+126e^5f^4$
62	25	$6,$	6^4